ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 520.24; 681.51

ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕННОЙ ЗАДЕРЖКИ МЕЖДУ МАГНИТНЫМИ ДИАГНОСТИЧЕСКИМИ КАТУШКАМИ В ТОКАМАКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРОСС-СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

© A. A. Nasimi¹, Sh. Saadat¹, B. Mansouri^{1,2}

¹Department of Physics, Ahvaz Branch, Islamic Azad University, Ahvaz, Iran ²Department of Statistics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran E-mail: shervinsa27@gmail.com

Задержка в определении положения плазмы усиливает нестабильность и снижает точность управления в токамаке. Предложены две методики, называемые периодограммой и кросс-спектральным анализом для количественного подхода к вычислению временно́й задержки между данными, полученными двумя разнесёнными катушками от одного источника: флуктуации плазмы в токамаке IR-T1. Для анализа данных после преобразования Фурье были получены: периодограмма, квадрат когерентности и фазовая диаграмма в трёх различных временны́х интервалах. В интервале времени 29000 < τ < 30000 мкс, когда ток плазмы почти постоянен, с помощью анализа фазового спектра получен средний фазовый сдвиг между частотными компонентами данных. Временна́я задержка между данными катушек Роговского и Мирнова на частоте наибольшей когерентности составила $\tau_d = 1,831$ мкс.

Ключевые слова: токамак, плазма, кросс-спектральный анализ, периодограмма, временна́я задержка.

DOI: 10.15372/AUT20200301

Введение. Под термином «магнитная диагностика» понимаются те диагностические средства, которые используются для измерения магнитных полей и потоков с помощью индукционных катушек. Во многих токамаках существенная информация о физических параметрах плазмы извлекается из сигналов, полученных разнесёнными магнитными диагностическими катушками из одного источника — флуктуаций плазмы. Сигналы, принимаемые многими разнородными катушками в токамаке, обычно записываются как временные ряды, которые формируют базу данных для изучения поведения плазмы.

Токамак IR-T1 — это небольшая исследовательская установка с воздушным сердечником. Катушки Мирнова и Роговского, применяемые на токамаке IR-T1, измеряют магнитное поле, окружающее плазменный шнур. Зонд Мирнова представляет собой индуктивный датчик в виде цилиндрической катушки, используемой для регистрации колебаний и положения плазмы в токамаке. Его можно разместить в полоидальной или тороидальной конфигурации. Свидетельством наличия магнитных островков в плазме токамака являются флуктуации магнитного поля, регистрируемые катушками Мирнова (рис. 1). Общий ток плазмы I_p легко измеряется с помощью пояса Роговского. Это многовитковый соленоид, охватывающий ток. Переменный плазменный ток генерирует полоидальное магнитное поле, которое индуцирует напряжение на концах катушки Роговского. Для измерения разрядного тока используется пассивная интегрирующая RC-цепочка. Данные катушек Мирнова (M_p) и Роговского (I_p) представляют собой быстро осциллирующие временны́е



Рис. 1. Положение полоидального массива из 12 катушек Мирнова и катушки Роговского

ряды, которые имеют общий источник — флуктуации плазмы [1, 2]. Во многих случаях статистический анализ временны́х рядов (M_p, I_p) может дать значительную информацию о флуктуациях плазмы [3].

Применение преобразования Фурье и кросскорреляционного анализа для сигнала с зонда Мирнова имеет долгую историю исследований. В [4] использовались катушки Мирнова для изучения магнитогидродинамических колебаний в токамаке PDX. Мирновские колебания в малом токамаке с помощью преобразования Фурье были изучены в [5]. Применение временно́го спектрального анализа колебаний Мирнова в токамаке исследовалось в [6]. В [7] была протестирована техника анализа с помощью смоделированных данных, а затем применена к данным катушки ADITYA Мирнова, чтобы определить структуру возмущения разрядного тока. В [8] экспериментально исследовались и моделировались переходные МГД-моды W7-AS с использованием быстрого преобразования Фурье. В [9] был предложен метод определения пространственной модовой структуры МГД-неустойчивостей плазмы путём перекрёстно-фазового корреляционного анализа, применяемого к сигналам магнитных зондов, установленных на токамаках Глобус-М и Туман-3М.

Стабильность плазмы и контроль ее неустойчивости в токамаке зависят от точности магнитных диагностических катушек. Появление временной задержки между катушками, которые регистрируют поведение плазмы в токамаке, увеличивает нестабильность и снижает точность контроля плазмы в токамаке. Таким образом, предпочтительно использовать магнитные катушки, которые собирают данные о флуктуациях плазмы одновременно. Оптимальным вариантом является отсутствие какой-либо временной задержки между данными.

Измерение временной задержки является проблемой при обработке сигнала. Определение задержки между сигналами, которые собираются диагностическими катушками из одного источника — важная проблема во многих областях, таких как технология катушек и датчиков, связь, сейсмология и магнитно-плазменная диагностика [10, 11]. Для определения временной задержки стохастических сигналов, полученных от двух или более датчиков, обычно используются статистические методы, например функция взаимной корреляции. Кросс-спектральный анализ позволяет определить связь между двумя временными рядами как функцию частоты [12, 13]. Функция корреляции даёт последовательность корреляций между двумя сигналами, которая достигается путём смещения одной последовательности относительно другой и суммирования результата. Кросскорреляция является одним из методов измерения временной задержки при обработке сигналов. Задержка определяется по времени, когда функция взаимной корреляции максимальна [14, 15]. Анализ периодограммы является мощным методом обнаружения скрытых и слабых периодичностей во временны́х рядах. Статистически значимый пик периодограммы показывает, что существует высокая линейная корреляция между временны́ми рядами, а функция взаимной корреляции является максимальной. Обычно при анализе периодограммы предполагается, что статистически значимые пики на одной и той же частоте были показаны в двух временны́х рядах, при этом хотелось бы видеть, связаны ли эти периодичности друг с другом и, если да, то каково фазовое соотношение между ними. Фазовая зависимость между временны́ми рядами описывается фазовым спектром, который представляет собой средний фазовый сдвиг между временны́ми рядами на каждой частоте.

В представленной работе впервые описывается использование метода кроссспектрального анализа для расчёта временной задержки между катушками Мирнова и Роговского в токамаке IR-T1.

Периодограмма. Обсуждается анализ временны́х рядов с помощью преобразования Фурье. Спектр как основной образ временно́го ряда оценивается периодограммой, которая является мощным методом для изучения скрытых и слабых периодичностей в этих рядах. Предположим, что $\{Z_t\}_{t=1}^n$ является слабо стационарным временны́м рядом с абсолютно суммируемой автокорреляционной функцией $\gamma_k = E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)]$, где $\mu = E(Z_t)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, -$ дискретная временна́я задержка, а E — оператор математического ожидания. Тогда спектр $f(\omega)$ (мера количества колебаний переменной временно́го ряда на разных частотах $\omega \in (-\pi, \pi)$) представляет собой просто преобразование Фурье γ_k , т. е.

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\omega k} \,. \tag{1}$$

Представление Фурье временны́х рядов Z_t определяется выражением [16]

$$Z_t = \sum_{k=0}^{[n/2]} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t), \qquad (2)$$

где частоты $\omega_k = 2\pi k/n$ для k = 0, ..., n/2 (если *n* чётное) или k = 0, ..., [n-1/2] (если *n* нечётное); a_k, b_k — коэффициенты Фурье. Как отмечено выше, спектр — главный инструмент для анализа Фурье-образа временны́х рядов. Так как $f(\omega)$ — неизвестная функция, её следует оценить по временно́му ряду Z_t . Функция периодограммы $I(\omega_k)$ определяется согласно [17, 18]:

$$I(\omega_k) = \begin{cases} na_0^2, & k = 0; \\ n(a_k^2 + b_k^2)/2, & k = 1, \dots, [(n-1)/2]; \\ na_{n/2}^2, & k = n/2 \text{ (когда } n \text{ чётное}). \end{cases}$$
(3)

График функции $I(\omega_k)$ является периодограммой набора данных.

1

Функция $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\gamma}_k e^{-i\omega k}$ называется выборочной спектральной плотностью,

где $\hat{\gamma}_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (Z_t - \bar{Z}) (Z_{t+k} - \bar{Z}); \ \bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_t$ — выборочное среднее. Легко показать,

что $\hat{f}(\omega_k) = I(\omega_k)/4\pi$, k = 1, ..., [n/2], или $\hat{f}(\omega_{n/2}) = I(\omega_{n/2})/2\pi$, если *n* чётное. Это несостоятельные оценки, однако мы можем изменить их и обеспечить состоятельную оценку, используя методы сглаживания (более подробно см. [19]). Результаты, полученные из анализа периодограммы, создают информацию о когерентных периодичностях, которые могут существовать в указанной выборке данных. Эта информация используется при интерпретации свойств и поведения колебаний.

Функция взаимной ковариации. Для двух связанных временны́х рядов x_t, y_t функция взаимной ковариации (ФВК) определяется согласно [17]:

$$\gamma_{x,y} = E[(x_t - \mu_x)(y_{t+k} - \mu_y)], \qquad k = 1, 2, \dots,$$
(4)

где $\mu_x = E(x_t), \ \mu_y = E(y_t)$ — средние значения рядов. Функция взаимной ковариации является подходящим инструментом для исследования соотношений между процессами x_t и y_t. Во временно́й области, если предположить, что ФВК абсолютно суммируема, т. е. $\sum \gamma_{x,y}(k) < \infty,$ то Фурье-образ ФВК, так называемый кросс-спектр между x_t и $y_t,$

даётся формулой [7]

$$f_{x,y}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{x,y}(k) e^{-i\omega k}, \qquad 0 < \omega < \pi.$$
(5)

На практике мы оцениваем $f_{x,y}(\omega)$ по выборочной функции $\hat{f}_{x,y}(\omega)$:

$$\hat{f}_{x,y}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\gamma}_{x,y}(k) e^{-i\omega k},$$
(6)

где

$$\hat{\gamma}_{x,y} = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y}), & k \ge 0; \\ \frac{1}{n} \sum_{t=1-k}^{n} (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y}), & k < 0. \end{cases}$$

Так как $f_{xy}(\omega)$ — комплексная функция, можем записать её в виде

$$f_{xy}(\omega) = c_{xy}(\omega) - iq_{xy}(\omega), \tag{7}$$

или в виде

$$f_{xy}(\omega) = A_{xy}(\omega) e^{i\varphi_{xy}(\omega)}$$

где $A_{xy}(\omega) = |f_{xy}(\omega)| = \sqrt{c_{xy}^2(\omega) + q_{xy}^2(\omega)}$ — амплитудный кросс-спектр, а $\varphi_{xy}(\omega) =$ $= \arctan\left[-q_{xy}(\omega)/c_{xy}(\omega)\right]$ — фазовый спектр. Предполагаем, что фазовый спектр и спектр амплитуд статистически независимы. Фазовый спектр представляет собой средний фазовый сдвиг между x_t и y_t на каждой частоте. Частотные компоненты x_t опережают частотные компоненты y_t , если фаза $\varphi_{xy}(\omega)$ отрицательна. Частотные составляющие x_t отстают от частотных составляющих y_t , если фаза $\varphi_{xy}(\omega)$ положительна. Для данного $\varphi_{xy}(\omega)$ задержка по времени между x_t и y_t на частоте ω имеет вид [17]

$$\tau_d = -\varphi_{xy}(\omega)/\omega. \tag{8}$$

Другая полезная функция, полученная из кросс-спектра, — это квадрат модуля когерентности, которая выражается через кросс-спектр мощности следующим образом [19]:

$$\operatorname{Coh}_{xy}^{2}(\omega) = \frac{|f_{xy}(\omega)|^{2}}{f_{x}(\omega)f_{y}(\omega)}, \qquad 0 < \operatorname{Coh}_{xy}^{2}(\omega) < 1.$$
(9)

Данная величина представляет собой коэффициент линейной корреляции между компонентами процессов x_t и y_t на частоте ω . Анализ корреляционных функций в предлагаемой работе выполнялся с помощью программных пакетов SPSS и ORIGIN.

Результаты и обсуждение. В соответствии с полным описанием спектрального анализа, представленным в предыдущих разделах, исследуем квадратную когерентность и средний фазовый сдвиг, чтобы рассчитать временну́ю задержку между данными катушек Роговского и Мирнова в токамаке. Токамак IR-T1 имеет катушку Роговского и 12 катушек Мирнова, наклонённых на 30° (см. рис. 1). Это малый исследовательский токамак с воздушным сердечником. Основные параметры токамака представлены в табл. 1.

В предлагаемой работе используется две методики, называемые периодограммой и кросс-спектральным анализом. Первый метод подходит для поиска скрытых или небольших периодичностей в данных, в то время как последний является удовлетворительным для определения когерентности, фазового сдвига и временной задержки между данными магнитной диагностики. Для этого применяются катушки Мирнова MP4 (90°) и катушка Роговского (см. рис. 1). Временной профиль тока плазмы (данные катушки Роговского) и колебаний с катушки Мирнова (снимок № 2017011260) показаны на рис. 2.



Таблица 1 Основные парамеры токамака IR-T1

Рис. 2. Временна́я эволюция: а — плазменного тока; b — данных катушки Мирнова (90°) (снимок № 2017011260)



Рис. 3. Периодограммы тока плазмы в интервале 29000–30000 мкс: а по данным катушки Роговского; b — по данным катушки Мирнова. Снимок № 2017011260. Доминирующий пик на частоте ν = 0,261 МГц

В представленном исследовании рассчитывается временная задержка для коррелированных данных временных рядов, которые регистрируются катушками Мирнова и Роговского по флуктуациям плазмы в токамаке IR-T1. Эта проблема исследована для трёхступенчатого процесса плазменного эксперимента: запуск, плоский участок и выключение. Анализ временной задержки проводится в области постоянного тока плазмы, соответствующей приблизительно 1000 мкс (1000 точек выборки). Для этого на сравнительно плоском участке (во временном интервале 29000–30000 мкс) построена периодограмма данных катушек Роговского и Мирнова в зависимости от частоты (рис. 3).

Как показано на рис. 3, на обеих периодограммах явно преобладает большой пик на частоте $\nu = 0,261 \text{ M}$ Гц. Появление большого пика на частоте $\omega = 2\pi\nu = 1,639 \times 10^6 \text{ c}^{-1}$ на обеих периодограммах показывает, что существует высокая линейная корреляция между данными катушек. Такая высокая линейная корреляция означает, что данные генерируются одними и теми же флуктуациям плазмы. Чтобы определить величину этой эффективности на каждой из двух катушек, необходимо рассчитать квадратную когерентность между данными катушек Роговского и Мирнова. Эта когерентность была рассчитана с использованием уравнения (9).

Как показано на рис. 4, *a*, эта когерентность имеет значение $\operatorname{Coh}_{I_p,M_p}^2(\omega) = 0,98$, что подразумевает тесную линейную связь данных катушек Роговского и Мирнова на частоте ω . Другими словами, на данные сильно влияют флуктуации плазмы. Такая корреляция может возникать либо одновременно, либо с задержкой по времени. Покажем, что обе катушки подвержены воздействию плазменных колебаний неодновременно. Другими словами, обе катушки собирают данные из одного источника (флуктуации плазмы), но с задержкой. Для определения этой временной задержки строятся фазовые спектры данных катушек Роговского (ток плазмы) и Мирнова.

Как показано на рис. 4, b, на частоте $\omega = 1,639 \times 10^6 \text{ c}^{-1}$ фазовый спектр $\varphi_{I_p,M_p} = -3,001$, что представляет средний фазовый сдвиг между компонентами данных катушек Роговского и Мирнова на частоте ω . Этот отрицательный сдвиг фазы указывает на то, что частотные составляющие данных катушки Роговского опережают частотные составляющие данных катушки Роговского опережают частотные составляющие данных катушки Роговского опережают частотные составляющие данных катушки Катушек по времени была рассчиными катушек на частоте наибольшей когерентности задержка по времени была рассчитана с использованием уравнения (8): $\tau_d = -\varphi_{I_p,M_p}/\omega = 1,831$ мкс. Таким образом, хотя и колебания тока в обеих катушках наводятся от одного источника, но между записанными данными существует задержка по времени.



Рис. 4. Когерентность и фазовый спектр между данными катушек Роговского и Мирнова в интервале 29000–30000 мкс: a — когерентность; b — фазовый спектр. Виден доминирующий пик на частоте $\nu = 0,261$ МГц



Рис. 5. Когерентность и фазовый спектр между данными катушек Роговского и Мирнова: a, c — в интервале 14000–15000 мкс, доминирующий пик на частоте $\nu = 0,257$ МГц; b, d — в интервале 47000–48000 мкс, доминирующий пик на частоте $\nu = 0,281$ МГц

Таблица 2

Интервал, мс	Частота, $10^6 c^{-1}$	Coh^2	Фаза	$ au_d$, мкс	$ au_{dav},{ m mkc}$	Погрешность, %
14 - 15	1,614	0,920	-3,010	1,864	1,832	1,7
29 - 30	$1,\!639$	0,980	-3,001	1,831	1,832	0,2
47 - 48	1,765	0,890	-3,180	1,802	1,832	1,4

Экспериментальные результаты для когерентности, спектральной фазы и временной задержки в пусковом, плоском и конечном интервалах времени

Кроме того, этот метод был аналогичным образом использован на переходных стадиях запуска и выключения плазмы. Как показано на рис. 5, *a*, *c*, наибольшая когерентность между данными катушек Роговского и Мирнова наблюдается на частотах $\omega = 1,614$ МГц и $\omega = 1,765$ МГц соответственно. На этапе запуска в интервале 14000–15000 мкс экспериментальные результаты на рис. 5, *a*, *b* свидетельствуют, что квадратная когерентность, сдвиг фазы и задержка имеют вид $\operatorname{Coh}_{I_p,M_p}^2(\omega) = 0,92$, $\varphi_{I_p,M_p} = -3,010$, $\tau_d = 1,864$ мкс соответственно. На этапе выключения в интервале 47000–48000 мкс экспериментальные результаты на рис. 5, *c*, *d* показывают, что когерентность, фаза спектра и временна́я задержка составляют $\operatorname{Coh}_{I_p,M_p}^2(\omega) = 0,89$, $\varphi_{I_p,M_p} = -3,18$, $\tau_d = 1,802$ мкс соответственно. Основные экспериментальные результаты сведены в табл. 2.

Заключение. Таким образом, продемонстрировано применение метода спектрального анализа для вычисления когерентности, среднего фазового сдвига и временной задержки между данными датчиков Роговского и Мирнова в токамаке и найдены их периодограммы как функции частоты. Экспериментальные результаты, полученные на периодограмме, показали, что наибольшая линейная корреляция ($\operatorname{Coh}_{I_p,M_p}^2(\omega) = 0.98$) имеет место при частоте $\omega = 1,639 \times 10^6 \text{ c}^{-1}$. Высокая когерентность доказывает, что данные катушек Мирнова и Роговского в большей степени зависят от одних и тех же плазменных колебаний. С помощью анализа фазового спектра был получен средний фазовый сдвиг между частотными компонентами данных катушек Роговского и Мирнова. Среднее смещение фазы $\varphi_{I_p,M_p} = -3,001$ указывает, что существует задержка по времени ($\tau_d = 1,832$ мкс) между сигналами зондов в токамаке IR-T1. Эта задержка должна учитываться в диагностике токамака и исследованиях, подобных тем, которые представлены в работе [20]. В частности, эта задержка времени может повлиять на процессы прогнозирования и использование поля обратной связи для управления плазмой в токамаке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Mirnov S. V., Semenov I. B. The nature of the large-scale instabilities in the tokamak // Sov. Phys. JETP. 1991. 33, N 6. P. 1134.
- 2. Equipe T. F. R. Tokamak plasma diagnostics // Nuclear Fusion. 1978. 18, N 6. P. 647.
- Alipour R., Ghanbari M. R. Magnetic evaluation of hydrogen pressures changes on MHD fluctuations in IR-T1 tokamak plasma // Eur. Phys. Journ. D. 2018. 72, N 4. P. 75.
- 4. Hammett G., Mcguire K. Analysis of Mirnov Oscillations on PDX Rep. Princeton, NJ: Princeton Plasma Physics Laboratory, 1982. P. 101–119.
- Htan I., Caldas I. L., Nascimento I. C. et al. Mirnov oscillations in a small tokamak // IEEE Trans. Plasma Sci. 1986. 14, N 3. P. 279–281.
- Franco H., Ribeiro C., da Silva R. P. et al. Time-resolved analysis of Mirnov oscillations // Rev. Sci. Instrum. 1992. 63, N 7. P. 3710–3715.

- Raju D., Jha R., Kaw P. K. et al. Mirnov coil data analysis for tokamak ADITYA // Pramana. Journ. Phys. 2000. 55, N 5. P. 727–732.
- Pokol G., Papp G., Por G. et al. Experimental study and simulation of W7-AS transient MHD modes // In AIP Conference Proceedings. 2018. 993, N 1. P. 215–218.
- Balachenkov I. M., Patrov M. I., Petrov Y. V. et al. Implementation of cross-phase analysis for study of MHD instabilities arising on TUMAN-3M and Globus-M tokamaks // Journ. Phys.: Conf. Ser. 2019. 1400, N 7. 077016.
- Mosorov V. A cumulative-signals-based method for time delay estimation // Meas. Sci. Rev. 2019. 19, N 2. P. 61–63.
- 11. Логинов А. А., Морозов О. А., Семенова М. Ю. Оптимальная дискретизация фазоманипулированных сигналов в задаче определения взаимной временной задержки // Автометрия. 2012. 48, № 4. С. 120–125.
- Hanus R. Statistical error analysis of time delay measurement by using phase of cross-spectral density function // Systems Analysis Modelling Simulation. 2014. 43, N 8. P. 993–998.
- Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D. Recovering parameters of time-delay systems from transient time series // Tech. Phys. Lett. 2008. 34, N 6. P. 483–485.
- White L. B., Boualem B. Cross spectral analysis of nonstationary processes // IEEE Trans. Inf. Theory. 1990. 36, N 4. P. 830–835.
- 15. Goswami R., Artaud J. F., Imbeaux F. et al. Numerical study of transition to supersonic flows in the edge plasma // Phys. Plasmas. 2014. 21, N 7. 072510.
- 16. Hamilton J. D. Time series analysis. Princeton university press, New Jersey, 1994. P. 158–163.
- Wei W. S. William, Time Series Analysis Univariate and Multivariate methods. Addison-Wesley, Canada, 1994. P. 349–355.
- Fisher R. A. Statistical Methods for Research Workers. Genesis Publishing Pvt Ltd, London, 2006. P. 193–203.
- Chatfield C. The Analysis of Time Series: An Introduction, 6th ed. Chapman and Hall/CRC, London, 2003. P. 160–171.
- Saadat Sh., Salem M. K., Goranneviss M., Khorshid P. Mode analysis with autocorrelation method (single time series) in tokamak // Journ. Fusion Energy. 2010. 29, N 4. P. 371–375.

Поступила в редакцию 10.01.2020 После доработки 21.02.2020 Принята к публикации 12.03.2020