РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1995

УДК 519.24

Е. Л. Кулешов

(Владивосток)

ПОВЫШЕНИЕ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ОЦЕНОК НА КОРОТКИХ РЕАЛИЗАЦИЯХ

Рассматривается последовательность спектральных оценок, смещения которых с увеличением их номера определяются производной все более высокого порядка от спектральной плотности или от преобразования Гильберта спектральной плотности. Показано, что эффекта снижения модуля смещения спектральной оценки в области коротких реализаций не обеспечивают ни окна данных, ни знакопеременные спектральные окна. Приведены примеры применения полученных результатов для построения и анализа спектральных оценок в прикладных задачах.

Введение. Сложность задач оценивания спектральной плотности стационарного случайного процесса существенно зависит от T/τ_0 — отношения длительности T реализации наблюдаемого процесса к его интервалу корреляции τ_0. По значению величины T/τ_0 можно условно выделить следующие четыре типа задач спектрального анализа:

1) ультракороткие реализации: $T/\tau_0 < 1$;

2) короткие реализации: порядок величины $T/\tau_0 \geq 1$ составляет 1—10;

3) реализации средней длительности: порядок величины T/τ_0 равен 10—100;

4) длинные реализации: порядок величины T/τ_0 больше 100.

Примером задачи первого типа является оценивание спектральной плотности отрезка зашумленного гармонического сигнала. Для ее решения обычно применяют параметрические методы [1], обладающие повышенным разрешением. Отметим, что такая задача существенно отличается от классической постановки спектрального анализа, поскольку функциональная зависимость спектральной плотности полезного сигнала полагается известной и задача сводится к оценке ее параметров.

Областью применения рассматриваемых ниже непараметрических спектральных оценок, основанных на анализе периодограммы и последующем ее сглаживании спектральным окном, являются задачи от второго типа до четвертого. Имеется большое число публикаций, в которых исследуются спектральные окна, обеспечивающие при $T \to \infty$ сходимость в среднеквадратическом спектральной оценки к спектральной плотности. Рекомендации, следующие из теории асимптотических оценок, позволяют получать удовлетворительную для практики точность спектральных оценок на длинных реализациях, хотя и в этой области существуют нерешенные проблемы, в связи с чем в [2] отмечалось, что «непараметрическое оценивание спектральных плотностей случайных процессов является большим искусством».

Однако решение многих прикладных проблем требует оценивания спектральной плотности по средним и коротким реализациям. Такое ограничение может быть связано как с условиями эксперимента или природой исследуемого процесса, когда доступны измерению только короткие реализации, так и с методом обработки, когда наблюдаемая реализация разбивается на несколько коротких [3]. Таким образом, для практики спектрального анализа актуально решение задач второго и третьего типа. Спектральный анализ в этих условиях имеет свои особенности [4, 5], которые не учитываются в асимптотической теории.

Ниже рассматриваются спектральные оценки стационарного случайного процесса для коротких реализаций. Вводится преобразование Гильберта от спектральной плотности, и показывается его важнейшая роль в задачах спектрального анализа на коротких реализациях. Строится последовательность спектральных оценок, смещения которых с увеличением их номера определяются производной все более высокого порядка от спектральной плотности или преобразования Гильберта спектральной плотности. Показано, что эффекта снижения модуля смещения спектральной оценки в области коротких реализаций не обеспечивают ни окна данных, ни знакопеременные спектральные окна [2]. Рассмотрены примеры применения полученных результатов для построения и анализа спектральных оценок в прикладных задачах.

Последовательность ковариационных и спектральных оценок. Пусть стационарный случайный процесс $x(t)$, наблюдаемый на интервале $[t_0, t_0 + T]$, имеет математическое ожидание $Mx(t) = 0$, ковариационную функцию $B(\tau)$ и спектральную плотность $F(\omega)$. Условие $T \geq \tau_0$, так же как в [4], будет означать, что или $B(\tau) = 0$ при $\tau \geq T$, или ошибками, связанными с отсечением ковариационной функции $B(\tau)$ при $\tau > T$, можно пренебречь. Для этого условия, согласно теореме Винера — Хинчина,

$$F(\omega) = \int_{-T}^{T} B(\tau)\cos\omega\tau d\tau. \tag{1}$$

Как известно, периодограмма

$$f_0(\omega) = \frac{1}{T}\left|\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-i\omega t}dt\right|^2 \tag{2}$$

и ковариационная оценка

$$\beta_0(\tau) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T-|\tau|} x(t)x(t+|\tau|)dt, \qquad |\tau| \leq T, \tag{3}$$

связаны между собой парой преобразований Фурье. Рассмотрим последовательность оценок

$$\beta_n(\tau) = \beta_0(\tau)\sum_{k=0}^{n}(|\tau|/T)^k. \tag{4}$$

Отсюда при $n = 0$ получаем β_0, а при $n = \infty$ — несмещенную оценку $\beta(\tau) = \beta_0(\tau)/(1 - |\tau|/T)$. Поскольку $M\beta_0(\tau) = B(\tau)(1 - |\tau|/T)$, то

$$M\beta_n(\tau) = B(\tau)\left[1 - (|\tau|/T)^{n+1}\right]. \tag{5}$$

Таким образом, модуль смещения оценки β_n определяется соотношением

$$\left|M\beta_n(\tau) - B(\tau)\right| = B(\tau)(|\tau|/T)^{n+1}.$$

Эта величина уменьшается с ростом n для любого $|\tau| < T$ (если $B(\tau) \neq 0$).

Определим спектральную оценку

$$f_n(\omega) = \int_{-T}^{T}\beta_n(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau. \tag{6}$$

Отсюда при $n = 0$ получаем периодограмму. Подставим (4) в (6), тогда после несложных преобразований

$$f_n(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{i}{T}\right)^k \frac{d^k}{d\omega^k} \left[\int_0^T \beta_0(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau + (-1)^k \int_{-T}^{0} \beta_0(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau\right]. \tag{7}$$

Выражение в квадратной скобке при четном k сводится к f_0, а при нечетном — к функции $[-ig(\omega)]$, где

$$g(\omega) = \int_{-T}^{T} \beta_0(\tau) \sin\omega|\tau| d\tau \tag{8}$$

и может рассматриваться как оценка функции

$$G(\omega) = \int_{-T}^{T} B(\tau) \sin\omega|\tau| d\tau. \tag{9}$$

Функция G была введена в [4] и, наряду со спектральной плотностью F, определяет точное выражение для ковариации конечного преобразования Фурье стационарного случайного процесса. Теперь

$$f_n(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{i}{T}\right)^k \frac{d^k}{d\omega^k} \begin{cases} f_0(\omega), & k \text{ четно;} \\ -ig(\omega), & k \text{ нечетно.} \end{cases} \tag{10}$$

Отсюда

$$f_n(\omega) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{(n-2)/2} \dfrac{(-1)^k}{T^{2k}} \dfrac{d^{2k}}{d\omega^{2k}} \left(f_0 + \dfrac{g'}{T}\right) + \dfrac{(-1)^{n/2}}{T^n} \dfrac{d^n}{d\omega^n} f_0, & n \text{ четно;} \\ \sum\limits_{k=0}^{(n-1)/2} \dfrac{(-1)^k}{T^{2k}} \dfrac{d^{2k}}{d\omega^{2k}} \left(f_0 + \dfrac{g'}{T}\right), & n \text{ нечетно.} \end{cases} \tag{11}$$

Здесь при $n = 0$ сумма по индексу k в первой строке полагается равной нулю и

$$g'(\omega) = \int_{-T}^{T} |\tau| \beta_0(\tau) \cos\omega\tau d\tau \tag{12}$$

— производная в среднеквадратическом функции g. В [4] получено, что $Mf_0 = F - G'/T$, где G' — производная функции G. Поэтому из (8) следует $Mg = G + F'/T$. Отсюда получаем $M(f_0 + g'/T) = F + F^{(2)}/T^2$, где $F^{(n)}$ — производная порядка n функции F. С учетом этого смещения оценок f_n (11) для $n = 1, 3, 5, \ldots$ имеют вид $F^{(2)}/T^2$, $-F^{(4)}/T^4$, $F^{(6)}/T^6, \ldots$ и соответственно для $n = 0, 2, 4, \ldots$ $-G^{(1)}/T$, $G^{(3)}/T^3$, $-G^{(5)}/T^5, \ldots$. Таким образом, в общем случае

$$Mf_n - F = \begin{cases} (-1)^{n/2+1} \dfrac{G^{(n+1)}}{T^{n+1}}, & n \text{ четно;} \\ (-1)^{(n-1)/2} \dfrac{F^{(n+1)}}{T^{n+1}}, & n \text{ нечетно,} \end{cases} \tag{13}$$

и смещение оценки f_n с увеличением номера n определяется производной от F или G все более высокого порядка.

Поскольку f_n и β_n образуют пару преобразований Фурье, то

$$Mf_n(\omega) - F(\omega) = \int\limits_{-T}^{T} \Big[M\beta_n(\tau) - B(\tau)\Big] \cos\omega\tau d\tau. \quad (14)$$

Отсюда получаем верхнюю границу модуля смещения:

$$\Big|Mf_n - F\Big| \leq \int\limits_{-T}^{T} \left(\frac{|\tau|}{T}\right)^{n+1} \Big|B(\tau)\Big| d\tau \leq \frac{2B(0)T}{n+2}. \quad (15)$$

Найти более точную оценку сверху для модуля смещения можно, если известен явный вид функции B. Однако для получения общего представления о возможности снижения верхней границы (15) воспользуемся грубым приближением $B(\tau) = B(0)(1 - |\tau|/T)$, тогда $|Mf_n - F| \leq 2B(0)T/[(n+2)(n+3)]$.

Свойства функции G. Функция G определяется соотношением (9). В [4] показано, что имеет место пара интегральных преобразований:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \left[\frac{1 - \cos(\omega + \lambda)T}{\omega + \lambda} + \frac{1 - \cos(\omega - \lambda)T}{\omega - \lambda}\right] d\lambda; \quad (16)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\lambda) \left[\frac{1 - \cos(\lambda + \omega)T}{\lambda + \omega} + \frac{1 - \cos(\lambda - \omega)T}{\lambda - \omega}\right] d\lambda. \quad (17)$$

Правая часть выражения (16) представляется суммой двух интегралов. Если в первом интеграле выполнить замену переменной $\lambda = -\nu$, тогда с учетом четности F вид первого интеграла совпадает со вторым. Аналогично после замены переменной $\lambda = -\nu$ во втором интеграле (16) последний по виду совпадает с первым интегралом (16). Результаты этих преобразований представляются формулой

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \frac{1 - \cos(\omega \pm \lambda)T}{\omega \pm \lambda} d\lambda, \quad (18)$$

где знак «–» соответствует первому преобразованию формулы (16), а «+» — второму. Из (18) следует выражение для производной:

$$\frac{G'(\omega)}{T} = \frac{T}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \left[\frac{\sin(\omega \pm \lambda)T}{(\omega \pm \lambda)T} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\omega \pm \lambda)T/2}{(\omega \pm \lambda)T/2}\right)^2\right] d\lambda. \quad (19)$$

Рассмотрим следующие свойства функции G.

1. Если спектральная плотность является интегрируемой, то функции G, G' ограничены.

Для доказательства отметим, что $\lim\limits_{\omega \to 0} (1 - \cos\omega T)/\omega = 0$, поэтому ядро интегрального преобразования (18) — функция ограниченная. Пусть ее модуль не превышает число c. Тогда из (18) следует $|G| \leq c \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) d\lambda/\pi$. Поскольку F — интегрируемая функция, то G — функция ограниченная. Аналогично ядро интегрального преобразования (19) — функция ограниченная, поэтому и G' — ограниченная функция.

Замечание. Для белого шума спектральная плотность $F = \text{const} = N_0$ и, следовательно, является неинтегрируемой. При этом ковариационная функция $B(\tau) = N_0\delta(\tau)$, где δ — дельта-функция. Подставляя это выражение в определение (9) функции G, получаем, что для белого шума $G = 0$.

2. Если спектральная плотность интегрируема, то при большом ω имеют место асимптотические выражения:

$$G(\omega) \sim 2B(0)/\omega, \qquad G'(\omega) \sim -2B(0)/\omega^2. \tag{20}$$

Для доказательства (20) рассмотрим формулу (18), например, со знаком «–». Подынтегральное выражение в (18) для любого ω является интегрируемой функцией. Поэтому можно указать конечную область интегрирования, для которой результат будет отличаться от функции вида (18) на любую малую наперед заданную величину, и, следовательно, при $\omega \to \infty$ выражение (18) имеет вид

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi\omega}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\left[1 - \cos(\omega - \lambda)T\right] d\lambda. \tag{21}$$

Применяя формулу косинуса разности и учитывая, что $F(\lambda)\sin\lambda T$ — нечетная функция аргумента λ, из (21) получаем $G(\omega) \sim 2[B(0) - B(T)\cos\omega T]/\omega$. Поскольку нижняя граница длительности коротких реализаций определяется условием $T \geq \tau_0$, то в соответствии с этим $B(T) = 0$, что и приводит к первому выражению (20). Аналогично, рассматривая (19), несложно получить, что асимптотика функции G' задается второй формулой (20).

3. Если T удовлетворяет условию $B(\tau) = 0$ для любого $\tau \geq T$, спектральная плотность F — интегрируемая функция с ограниченной вариацией, а ее производная F' — ограниченная функция, тогда F и G связаны между собой парой интегральных преобразований:

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\lambda)}{\omega \pm \lambda}\, d\lambda; \tag{22}$$

$$F(\omega) = \pm\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\lambda)}{\omega \pm \lambda}\, d\lambda. \tag{23}$$

Заметим, что если в (22), (23) выбрать знак «–», то эти соотношения образуют пару интегральных преобразований Гильберта [6]; кроме того, переход от выражения, содержащего знак «–», к выражению со знаком «+» и наоборот осуществляется с помощью замены переменной интегрирования вида $\lambda = -\nu$ и с учетом четности F и нечетности G.

Для доказательства (22) рассмотрим выражение (18). Пусть выбран вариант формулы со знаком «–». При выполнении условия $B(\tau) = 0$ для любого $\tau \geq T$ в соотношении (9) в пределах интегрирования величина T может быть заменена на любое $T_0 \in [T, \infty)$. Тогда в (16) и (18), как следует из вывода соотношения (16) [4], также T можно заменить на T_0. Выполним замену переменной интегрирования $z = \omega - \lambda$, тогда с учетом равенства

$$\int_{-\infty}^{0} F(\omega - z)\,\frac{1 - \cos zT_0}{z}\, dz = -\int_{0}^{\infty} F(\omega + \nu)\,\frac{1 - \cos\nu T_0}{\nu}\, d\nu \tag{24}$$

из (18) получаем

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{1 - \cos zT_0}{z}\left[F(\omega - z) - F(\omega + z)\right] dz. \tag{25}$$

Если F' ограничена, а F имеет ограниченную вариацию, то функция $\varphi(z;\omega) = [F(\omega - z) - F(\omega + z)]/z$ переменной z имеет ограниченную вариацию при любом ω. По лемме Римана [7] при большом T_0 величина $\int\limits_0^\infty \cos zT_0\varphi(z;\omega)dz$ имеет порядок не более чем $1/T_0$. Поэтому из (25) следует

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{F(\omega - z) - F(\omega + z)}{z}\,dz. \tag{26}$$

Теперь необходимо выполнить обратный переход по переменным интегрирования. На первом шаге получим равенство

$$-\int\limits_0^\infty \frac{F(\omega + z)}{z}\,dz = \int\limits_{-\infty}^0 \frac{F(\omega - v)}{v}\,dv.$$

Подставим этот результат в (26) и выполним замену $\lambda = \omega - z$ переменной интегрирования z на всей действительной оси. В результате получим соотношение (22) для знака «−».

Для доказательства (23) необходимо установить, что функция G удовлетворяет условиям, аналогичным ограничениям, наложенным на функцию F, при выводе соотношения (22). Тогда из (17) следует (23), так же как из (16) было получено (18) и затем (22). Отметим, что при выводе формулы (22) условие интегрируемости функции F не использовалось. Поэтому для выполнения равенства (22) достаточно более слабых условий, а именно ограниченности вариации функции F и ограниченности ее производной F'. При выводе (23) будем требовать дополнительно выполнения условия интегрируемости F, что и отражено в формулировке утверждения 3. Как было показано, это обеспечивает ограниченность функций G, G' и гарантирует их асимптотику вида (20). При этом функция G имеет ограниченную вариацию

$$\mathrm{var}G = \int\limits_0^\infty \left|dG(\omega)\right| = \int\limits_0^\infty \left|G'(\omega)\right|d\omega.$$

Действительно, пусть $|G'| \le c_1$ на интервале $[0, \omega_1]$. При этом ω_1 выберем столь большим, что при $\omega > \omega_1$ выполняется (20). Тогда

$$\mathrm{var}G \le \omega_1 c_1 + 2B(0)\int\limits_{\omega_1}^\infty \frac{d\omega}{\omega^2} = \omega_1 c_1 + \frac{2B(0)}{\omega_1}.$$

Следовательно, функция G удовлетворяет таким же условиям, как и функция F при выводе равенства (22). Поэтому из (17) следует (23).

Знакопеременные окна и снижение смещения спектральных оценок. В работах [2, 8] и ряде других рассматривались знакопеременные спектральные окна, которые позволяют получить эффект снижения смещения, аналогичный (13). В [2] прямо утверждается, что применение оценок f_n [4], а также некоторых других, полученных на основе f_n, «по существу представляет собой применение весовых функций порядков больше двух» (имеется в виду применение знакопеременных спектральных окон). Данное утверждение является неверным, прежде всего, потому, что в [2] рассматривается асимптотическая теория спектральных оценок, выводы которой обоснованы только для области длинных реализаций. Рассматриваемые в данной статье оценки f_n, а также некоторые другие, введенные в [4], применимы в области коротких, средних и длинных реализаций. Конечно, наибольшее различие для указанных двух типов оценок следует ожидать в области коротких реализаций. Ниже рассмотрим пример построения знакопеременного окна, применение которого в области коротких реализаций может приводить к увеличению модуля смещения спектральной оценки, т. е. к эффекту, обратному от ожидаемого, а также укажем два условия, применяемые при построении спектральных оценок на основе знакопеременных окон, которые не выполняются в области коротких реализаций.

Знакопеременное спектральное окно h строится следующим образом [8]. Сглаженная спектральная оценка

$$f_c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega - \lambda) f_0(\lambda) d\lambda. \tag{27}$$

Предполагается, что выполняются два условия:

$$Mf_0(\omega) = F(\omega); \tag{28}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) d\omega = 1. \tag{29}$$

При этом из (27) следует, что смещение

$$Mf_c(\omega) - F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega - \lambda) \left[F(\lambda) - F(\omega) \right] d\lambda. \tag{30}$$

Такое выражение для смещения без учета членов порядка $1/T$ применялось в [2, 8]. Функция $F(\lambda)$ разлагается в ряд около точки ω:

$$F(\lambda) = F(\omega) + F^{(1)}(\omega)(\lambda - \omega) + \frac{1}{2} F^{(2)}(\omega)(\lambda - \omega) + \dots . \tag{31}$$

Для устранения влияния на смещение (30) производных $F^{(n)}$ порядка до r выбирают сглаживающее окно, удовлетворяющее условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^j h(\omega) d\omega = \begin{cases} = 0, & j = 1, \dots, r - 1; \\ \neq 0, & j = r. \end{cases} \tag{32}$$

Тогда после подстановки (31) в (30) равны нулю все слагаемые, содержащие производные порядка до $r - 1$ включительно, и остаются производные порядка r и более высокого.

Такой подход связан с двумя существенными допущениями (28), (29), которые не выполняются для коротких реализаций. Если вместо приближенного выражения (28) использовать точное: $Mf_0 = F - G'/T$, то в результате подстановки (31) в (30) смещение спектральной оценки f_c содержит члены порядка G'/T и не достигается основная цель выбора спектрального окна (32) — уменьшение модуля смещения (30) за счет устранения производных $F^{(n)}$ порядка до $r - 1$. Кроме того, применение условия (29) также вносит дополнительную ошибку. Как показано в [5], интеграл вида (29) от оптимального спектрального окна h_0, минимизирующего среднеквадратическую ошибку $M(f_c - F)^2$, в области коротких и средних реализаций значительно отличается от единицы. При этом сохранение условия нормировки (29) заведомо обеспечивает неоптимальность сглаженной оценки f_c. Поэтому такой подход к выбору сглаживающих окон обоснован только в случае длинных реализаций. Отметим, что среди широко применяемых на практике спектральных окон имеются окна с отрицательными значениями на некоторых частотах. К ним относятся, например, по терминологии [3] прямоугольное окно и окно Тьюки, для которых несложно проверить условия (32).

Рассмотрим пример спектрального окна, удовлетворяющего условиям (32), применение которого приводит, против ожидаемого, к увеличению модуля смещения спектральной оценки. Условия (32) можно сформулировать для корреляционного окна:

$$H(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega. \tag{33}$$

Эти условия представляются теперь соотношениями:

$$\left.\frac{d^j}{d\tau^j}H(\tau)\right|_{\tau=0} = \begin{cases} = 0, & j = 1, ..., r-1; \\ \neq 0, & j = r. \end{cases} \tag{34}$$

Следовательно, корреляционное окно в нулевой точке должно иметь определенную степень гладкости, как, например, зависимость $1 - (\tau/T)^m$, m — положительное четное число. Из (4) следует, что оценке β_n соответствует корреляционное окно H_n, определяемое равенством

$$2\pi H_n(\tau) = \sum_{k=0}^{n}(|\tau|/T)^k.$$

Такое окно приводит к уменьшению модуля смещения оценок β_n и f_n с увеличением n. Проверим для него условия (32), (34). Поскольку H_n — четная функция, то и соответствующее спектральное окно h_n — четная функция и для любого нечетного $j < n$ интеграл вида (32) равен нулю. Однако для четного $j \leq n$ получаем

$$\left.d^j H_n(\tau)/d\tau^j\right|_{\tau=0} > 0,$$

следовательно, условие (34) не выполняется, кроме случая $r = n = 2$. Таким образом, окно H_n, приводящее к снижению модуля смещения, не удовлетворяет условиям (32), (34) для любого $r > 2$.

С другой стороны, рассмотрим корреляционное окно H вида $2\pi H(\tau) = 1 - (|\tau|/T)^{n+1}$ для четного $n + 1$. Несложно видеть, что это окно удовлетворяет условиям (34), при этом $r = n + 1$. Однако его применение к оценке β_0 не уменьшает модуля смещения. Действительно, смещение оценки $2\pi H\beta_0$ имеет вид $[-|\tau|/T - (|\tau|/T)^{n+1}(1 - |\tau|/T)]B(\tau)$. В данном случае выполнение условий (34) привело к эффекту, обратному от ожидаемого: возрастанию модуля смещения оценки $2\pi H\beta_0$ по сравнению с оценкой β_0.

Окна данных и смещение ковариационных оценок. В ряде работ [2] для получения ковариационных и спектральных оценок применялись окна данных. Процедура их применения заключается в умножении реализации $x(t)$ исследуемого процесса на окно данных — функцию $a(t)$. Затем находится ковариационная оценка

$$\beta_a(\tau) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T-|\tau|} x(t)a(t)x(t+|\tau|)a(t+|\tau|)dt, \qquad |\tau| \leq T, \tag{35}$$

или соответствующая спектральная оценка f_a, равная преобразованию Фурье от β_a. Из (35) следует $M\beta_a(\tau) = B(\tau)\varphi(\tau)$, где

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T-|\tau|} a(t)a(t+|\tau|)dt. \tag{36}$$

Если H — корреляционное окно, то для сглаженной ковариационной оценки имеем

$$M2\pi H(\tau)\beta_0(\tau) = 2\pi H(\tau)(1 - |\tau|/T)B(\tau).$$

Таким образом, применение окна данных $a(t)$ сводится к эквивалентному корреляционному окну $H(\tau)$, и связь между ними задается равенством $\varphi(\tau) = 2\pi H(\tau)(1 - |\tau|/T)$. Кроме того, отметим, что если $|a(t)| \leq 1$, то из (36) следует $|\varphi(\tau)| \leq (1 - |\tau|/T)$. Поэтому для любого окна данных модуль смещения оценки β_a не меньше модуля смещения оценки β_0. Следовательно, применение окон данных в области коротких реализаций не позволяет снизить модуль смещения ковариационной оценки β_a по сравнению с β_0 или соответствующей спектральной оценки f_a по сравнению с периодограммой f_0.

Оценивание спектральной плотности по нескольким реализациям. В качестве примера практического применения полученных результатов рассмотрим построение оценок спектральной плотности по N независимым коротким реализациям длительностью T каждая.

1. Спектральная оценка f_c может быть определена как среднее периодограммы по всем реализациям. Если $I_k(\omega)$ — периодограмма для k-й реализации и $I_k^j = I_k(j\Delta)$, где $\Delta = \pi/T$, то

$$f_c^j = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} I_k^j. \tag{37}$$

Поскольку реализации независимы, то дисперсия $\mathrm{var} f_c^j = \mathrm{var} I_k^j / N$, а смещение $Mf_c^j - F_j = -G_j'/T$, где $F_j = F(j\Delta)$, $G_j = G(j\Delta)$. Используя выражение для ковариации конечного преобразования Фурье стационарного случайного процесса [4] и представление четвертого момента через моменты второго порядка [3], несложно получить, что без учета четвертого кумулянта дисперсия периодограммы (2) $\mathrm{var} f_0 = (F - G'/T)^2$. Поэтому среднеквадратическая ошибка оценки (37) равна

$$\varepsilon_j^2 = (F_j - G_j/T)^2/N + (G_j'/T)^2. \tag{38}$$

2. Если число N реализаций достаточно велико, то при малой их длительности может оказаться, что в (38) второе слагаемое больше первого для некоторых j. В этом случае среднеквадратическую ошибку оценки (37) можно уменьшить, если применить вместо периодограммы оценку f_1. Как следует из (13), смещение такой оценки равно $F^{(2)}/T^2$, а дисперсия рассматривалась в [4].

3. Для снижения смещения оценки (37) вместо периодограммы могут быть последовательно использованы и другие оценки $f_2, f_3, \ldots$ (6). Однако с увеличением номера оценки уже не достигается столь значительное снижение смещения, как это было на первом шаге, т. е. для оценки f_1. Кроме того, значительно возрастает сложность выражения для дисперсии. Поэтому последовательный перебор оценок f_n может оказаться неприемлемым по времени вычисления и целесообразно рассмотреть оценку вида

$$z = f_c + p\psi(f_c), \tag{39}$$

где f_c — оценка (37); $-\psi(f_c)$ — оценка смещения оценки f_c (т. е. оценка функции $-G'/T$); ψ — оператор, определяемый равенством $G'/T = \psi(F)$, которое в непрерывном варианте имеет вид (19), а в дискретном — представлено в [4]. Число p определим из условия $\varepsilon^2 = M(z - F)^2 \to \min\limits_p$. Решение уравнения $\partial\varepsilon^2/\partial p = 0$ приводит к оптимальному:

$$p = -[M(f_c - F)\psi(f_c)]/M[\psi(f_c)]^2. \tag{40}$$

Данное значение p обеспечивает минимум ε^2, поскольку $\partial^2\varepsilon^2/\partial p^2 > 0$. С учетом (39), (40) минимальное значение среднеквадратической ошибки

$$\varepsilon_m^2 = M(f_c - F)^2 - p^2 M[\psi(f_c)]^2.$$

4. Выбором соответствующего p в соотношении (39) можно получить несмещенную оценку. Из условия $Mz = F$ с учетом линейности оператора ψ получаем $p = (G'/T)/[G'/T - \psi(G'/T)]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гун С., Рао Д., Арун К. Спектральный анализ: от обычных методов к методам с высокой разрешающей способностью // Сверхбольшие интегральные схемы и современная обработка сигналов /Под ред. С. Гуна, Х. Уайтхауса, Т. Кайлата. М.: Радио и связь, 1989.
2. Алексеев В. Г. К вопросу о построении сверхразрешающих спектральных оценок // Автометрия. 1986. № 1.
3. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1971.
4. Кулешов Е. Л. Непараметрические спектральные оценки с высоким разрешением // Автометрия. 1984. № 2.
5. Кулешов Е. Л. Непараметрические спектральные оценки стационарных случайных процессов на конечных реализациях // Автометрия. 1992. № 6.
6. Френкс Л. Теория сигналов. М.: Сов. радио, 1974.
7. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. М.: Мир, 1970.
8. Алексеев В. Г. Некоторые практические рекомендации по спектральному анализу гауссовских стационарных случайных процессов // Проблемы передачи информации. 1973. Вып. 4.

Поступила в редакцию 28 июля 1993 г.