неквадратической ошибки аппроксимации $b_{\text{МАВ}}(\alpha)$ наблюдений $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_N$ моделью (1) к оценке $b_{\text{м}}$ дисперсии шума измерений, полученной независимо по данным метрологического эксперимента. Подгонка осуществляется варьированием параметра α, регулирующего отношение между информацией, содержащейся в априорном распределении оцениваемого параметра, и информацией об этом параметре, имеющейся в экспериментальных данных (наблюдениях $x_1, x_2, \ldots, x_N$). По-видимому, этот способ регуляризации является самым простым. Как можно понять из статистической интерпретации задачи, другие способы регуляризации связаны с подгонкой более сложных (возможно, векторных) функционалов, заданных на последовательностях ошибок аппроксимации $\varepsilon_i = x_i - f_i(c_{\text{МАВ}}(\alpha))$, $i = 1, 2, \ldots, N$, к соответствующим функционалам шума наблюдений y_i, $i = 1, 2, \ldots, K$.

Укажем еще на связь между проверкой статистических гипотез и рассмотренным методом регуляризации: фактически параметр регуляризации α в этом методе подбирается по критерию максимальной достоверности гипотезы $H: b_{\text{МАВ}}(\alpha) = b_{\text{м}}$, связанной с проверкой адекватности данных $x_1, x_2, \ldots, x_N$ и принятой для модели наблюдения вида (1).

Наконец, отметим очевидную возможность обобщения рассмотренного метода регуляризации на случаи неаддитивного шума наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Петерка В.** Байесовский подход к идентификации систем // Современные методы идентификации систем/Под ред. П. Эйкхоффа.— М.: Мир, 1983.
2. **Де Гроот М.** Оптимальные статистические решения.— М.: Мир, 1979.
3. **Сейдж Э. П., Мелса Дж. Л.** Идентификация систем управления.— М.: Наука, 1974.
4. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1974.
5. **Резник Л. К.** Использование нечеткой информации для повышения точности оценок измеряемых величин // Автометрия.— 1985.— № 4.

Поступила в редакцию 13 января 1986 г.

УДК 519.24

Я. А. БЕДРОВ

(*Ленинград*)

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ, БЛИЗКИХ К ПЕРИОДИЧЕСКИМ

Введение. Результаты экспериментальных наблюдений различных медико-биологических процессов свидетельствуют о том, что они часто имеют характер периодических колебаний. Эти колебания или связаны с периодичностью внешних воздействий (суточные и годовые колебания), или являются естественным режимом работы некоторой системы (дыхательные движения, сердечные сокращения и т. д.).

Наиболее существенное отличие периодических процессов в живых системах от аналогичных процессов в технических устройствах — это присущая первым нестационарность колебаний, которая есть следствие их высокой сложности. Это приводит к тому, что любой периодический процесс в живой системе будет им лишь приближенно. Типичный пример такой приближенной периодичности — процесс, у которого амплитуда подвержена медленным (по сравнению с периодом) изменениям.

Интуитивно ясно, что в этих случаях решение задачи оценивания дискретного процесса по результатам его зашумленных наблюдений сталкивается со следующей проблемой: каким образом учесть ту априорную информацию, которая заключается в его близости к периодическому процессу? Один из возможных способов решения этой задачи — использование оценки метода наименьших квадратов (ОМНК), полученной в предположении, что периодичность точная.

Нашей задачей было показать существование оценки, обладающей в рассматриваемом случае большей точностью, чем ОМНК. Как известно [1], обычным методом, применяемым при сглаживании периодических последовательностей, служит представление искомой периодичности отрезком тригонометрического ряда. Однако в нашем случае более адекватным оказывается метод, основанный на прямом использовании условия периодичности.

Ниже рассматривается задача оценивания дискретного, близкого к периодическому процесса, заданного вектором наблюдений y, содержащих случайную составляющую. Показано, что в случае строгой периодичности ОМНК для вектора $E[y]$ дается выражением

$$\tilde{x}=\lim_{\alpha\to\infty}(I+\alpha M^TM)^{-1}y,$$

где M — матрица системы линейных ограничений, полученных из условия периодичности. Для случая приближенной периодичности доказано существование такого интервала $[\alpha^*, \infty)$ значений параметра α, что оценка

$$\tilde{x}(\alpha)=(I+\alpha M^TM)^{-1}y, \quad \alpha\in[\alpha^*, \infty),$$

обладает меньшей полной среднеквадратической ошибкой, чем $\tilde{x}$. Показано, что выбранный критерий качества

$$J(\alpha)=E[(\tilde{x}(\alpha)-x)^T(\tilde{x}(\alpha)-x)], \quad \alpha\in[0, \infty),$$

имеет единственный минимум при значении $\alpha=\alpha^*$. Предложен метод оценивания значения α^* с помощью величины $\alpha_{\min}$, доставляющей минимум несмещенной оценке функционала $J(\alpha)$.

Эффективность оценки $\tilde{x}(\alpha)$ продемонстрирована на модельных примерах.

1. Постановка задачи и метод решения (точная периодичность). Рассмотрим модель

$$y=x+\varepsilon, \ \varepsilon\in N(0, \sigma^2 I), \tag{1}$$

где x — n-вектор, компоненты которого удовлетворяют условиям

$$x_{i+m}=x_i, \ i=1, \ \ldots, \ n-m, \ m<n. \tag{2}$$

Требуется на основании вектора наблюдений y получить ОМНК неизвестного вектора x.

Запишем систему ограничений (2) в форме

$$0=Mx;$$

$$\underset{(n-m)\times n}{M}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 & & & \\ & \ddots & & & \ddots & 0 & & \\ & & \ddots & & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & \underbrace{1 \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0 \ -1}_{m+1} & & & & \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

В силу линейной независимости строк матрицы M дефект ее ранга равен m, и, следовательно, общее решение системы (3) запишется в форме

$$x=H\beta,$$

где H — $n\times m$-матрица, столбцы которой — собственные векторы симметрической матрицы M^TM, соответствующие ее нулевым собственным числам. Подставляя это решение в (1), получим

$$y=H\beta+\varepsilon. \tag{4}$$

Как известно [2], ОМНК вектора $H\beta$ дается выражением

$$\tilde{x}=H(H^TH)^{-1}H^Ty,$$

откуда в силу ортонормированности столбцов матрицы H будем иметь $\tilde{x} = HH^T y$. Покажем, что

$$\tilde{x} = \lim_{\alpha\to\infty} (I + \alpha M^T M)^{-1} y.$$

Пусть R — $n \times (n-m)$-матрица, столбцы которой — собственные векторы матрицы $M^T M$, соответствующие ее ненулевым собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-m}$. Запишем матрицу $M^T M$ в форме

$$M^T M = PLP^T; \quad P = (R \vdots H);$$
$$L = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-m}, 0, \ldots, 0\}, \tag{5}$$
$$\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{n-m}.$$

В силу (5) и ортонормированности столбцов матрицы P

$$(I + \alpha M^T M)^{-1} = P (I + \alpha L)^{-1} P^T. \tag{6}$$

Так как при $\lambda > 0$

$$\lim_{\alpha\to\infty} (1 + \alpha\lambda)^{-1} = 0,$$

а при $\lambda = 0$

$$(1 + \alpha\lambda)^{-1} = 1, \ \alpha \in [0, \infty),$$

то

$$\lim_{\alpha\to\infty} (I + \alpha L)^{-1} = D;$$

$$D = \operatorname{diag}\{\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m}, 1, \ldots, 1\}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\alpha\to\infty} (I + \alpha M^T M)^{-1} y = (R \vdots H)\, D\, (R \vdots H)^T y = (0 \vdots H)(R \vdots H)^T y = HH^T y.$$

2. **Постановка задачи и метод решения (приближенная периодичность).** Рассмотрим модель

$$y = x + \varepsilon, \ \varepsilon \in N(0, \sigma^2 I); \ 0 = Mx + \mu, \tag{7}$$

где x и M те же, что и в п. 1; σ^2 задано; μ — неизвестный $n-m$-вектор. Будем оценивать вектор x с помощью выражения

$$\tilde{x}(\alpha) = (I + \alpha M^T M)^{-1} y, \quad \alpha > 0. \tag{8}$$

В качестве критерия точности оценивания выберем функционал

$$J(\alpha) = E[(\tilde{x}(\alpha) - x)^T (\tilde{x}(\alpha) - x)].$$

Покажем существование интервала $[\alpha^*, \infty)$ значений α таких, что оценка $\tilde{x}(\alpha)$, $\alpha \in [\alpha^*, \infty)$, лучше, чем $\tilde{x}$, в смысле выбранного критерия. Так как $\tilde{x} = \tilde{x}(\infty)$, то для решения поставленной задачи достаточно показать, что $J(\alpha) < J(\infty)$, $\alpha \in [\alpha^*, \infty)$. Получим выражения для среднего и дисперсионной матрицы оценки $\tilde{x}(\alpha)$. В силу (7) и (8)

$$E[\tilde{x}(\alpha)] = (I + \alpha M^T M)^{-1} x,$$

т. е. оценка $\tilde{x}(\alpha)$ является смещенной, и выражение для ее смещения имеет вид

$$E[\tilde{x}(\alpha) - x] = ((I + \alpha M^T M)^{-1} - I) x = P((I + \alpha L)^{-1} - I) P^T x. \tag{9}$$

В соответствии с (7), (8) и (6)

$$D[\tilde{x}(\alpha)] = \sigma^2 (I + \alpha M^T M)^{-2} = \sigma^2 P (I + \alpha L)^{-2} P^T. \tag{10}$$

Как известно [2],

$$E[a^T A a] = \operatorname{tr}[D[a] A] + E[a^T] A E[a], \tag{11}$$

откуда в силу (9) и (10) получим

$$J(\alpha) = \sigma^2 \operatorname{tr}[(I + \alpha L)^{-2}] + \alpha^2 x^T P L^2 (I + \alpha L)^{-2} P^T x.$$

Введем обозначение:

$$z = |z_1, \ldots, z_n|^T = P^T x. \tag{12}$$

Теперь выражение для $J(\alpha)$ может быть записано в форме

$$J(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2 \lambda_i^2 \alpha^2 + \sigma^2}{(1+\alpha\lambda_i)^2}. \tag{13}$$

В силу (13) выражение для первой производной от $J(\alpha)$ имеет вид

$$J'(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} J'_i(\alpha); \quad J'_i(\alpha) = \frac{2\lambda_i \left(z_i^2 \lambda_i \alpha - \sigma^2\right)}{(1+\alpha\lambda_i)^3}.$$

Так как при $\lambda_i = 0$ $J'_i(\alpha) = 0$, то окончательно

$$J'(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-m} J'_i(\alpha).$$

Очевидно, что

$$J'(\alpha) \geqslant \sum_{i=1}^{n-m} \frac{2\lambda_{n-m}\left(z_i^2 \lambda_i \alpha - \sigma^2\right)}{(1+\alpha\lambda_1)^3} = \frac{2\lambda_{n-m}}{(1+\alpha_1\lambda_1)^3}\left(\sum_{i=1}^{n-m} z_i^2 \lambda_i \alpha - (n-m)\sigma^2\right)$$

и

$$J'(\alpha) \leqslant \frac{2\lambda_1}{(1+\alpha\lambda_{n-m})^3}\left(\sum_{i=1}^{n-m} z_i^2 \lambda_i \alpha - (n-m)\sigma^2\right).$$

Поскольку в силу (5), (7) и (12)

$$\sum_{i=1}^{n-m} z_i^2 \lambda_i = \mu^T \mu,$$

то получаем

$$J'(\alpha) > 0, \ \alpha > \alpha^*;$$
$$J'(\alpha) < 0, \ \alpha < \alpha^*;$$
$$\alpha^* = (n-m)\sigma^2/\mu^T\mu,$$

откуда в силу непрерывности функции $J'(\alpha)$ будем иметь $J'(\alpha^*) = 0$ и, следовательно, $J(\alpha) < J(\infty)$, $\alpha \in [\alpha^*, \infty)$, а значение α^* — единственная точка минимума функции $J(\alpha)$, $\alpha \in [0, \infty)$.

Поскольку функционал $J(\alpha)$ зависит от неизвестного вектора x, то с точки зрения практического применения оценки $\tilde{x}(\alpha)$ представляет интерес рассмотреть возможность использования для оценивания значения α^* несмещенной оценки этого функционала. Выберем в качестве оценки неизвестного вектора z вектор

$$\tilde{z} = |\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n|^T = P^T y.$$

В силу модели (7) и ортогональности матрицы P

$$E[\tilde{z}] = z; \quad D[\tilde{z}] = \sigma^2 P^T I P = \sigma^2 I,$$

откуда

$$E[\tilde{z}_i^2] = z_i^2 + \sigma^2, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и, следовательно, несмещенная оценка для $J(\alpha)$ может быть записана в форме

$$\tilde{J}_0(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha^2 \lambda_i^2 \left(\tilde{z}_i^2 - \sigma^2\right) + \sigma^2}{(1+\alpha\lambda_i)^2}.$$

№ п/п	a	σ	$s^2(\tilde{x}(\infty))$	$s^2(\tilde{x} \times (\alpha_{min}))$	α_{min}	№ п/п	a	σ	$s^2(\tilde{x}(\infty))$	$s^2(\tilde{x} \times (\alpha_{min}))$	α_{min}
1	0,0025	0,02	0,00075	0,00014	2,2	11	0,0075	0,02	0,0059	0,00021	0,8
2	0,0025	0,04	0,00091	0,00042	4,2	12	0,0075	0,04	0,0061	0,00065	1,5
3	0,0025	0,06	0,0012	0,00079	7,0	13	0,0075	0,06	0,0063	0,0012	2,2
4	0,0025	0,08	0,0016	0,0013	10,0	14	0,0075	0,08	0,0067	0,0019	2,9
5	0,0025	0,10	0,0020	0,0018	16,0	15	0,0075	0,10	0,0072	0,0028	3,6
6	0,005	0,02	0,0027	0,00018	1,2	16	0,01	0,02	0,010	0,00024	0,6
7	0,005	0,04	0,0028	0,00055	2,2	17	0,01	0,04	0,011	0,00073	1,2
8	0,005	0,06	0,0031	0,0010	3,2	18	0,01	0,06	0,011	0,0014	1,7
9	0,005	0,08	0,0035	0,0016	4,2	19	0,01	0,08	0,011	0,0022	2,2
10	0,005	0,10	0,0040	0,0023	5,0	20	0,01	0,10	0,012	0,0031	2,7

Выберем в качестве оценки величины α^* значение α_{min}, доставляющее минимум функционалу $\mathcal{J}_0(\alpha)$.

3. **Алгоритм и пример применения.** Алгоритм вычисления оценки $\tilde{x}(\alpha_{min})$ состоит из следующей последовательности операций:

1) составляется матрица M и вычисляется матрица M^TM;

2) вычисляются собственные значения $\{\lambda_i\}_1^{n-m}$ и собственные векторы $\{p_i\}_1^n$ матрицы M^TM и строится матрица

$$P = \| p_1 : \ldots : p_n \|;$$

3) находится значение вектора $\tilde{z} = P^Ty$;

4) находится значение α_{min}, доставляющее минимум функции $\mathcal{J}_0(\alpha)$;

5) вычисляется оценка

$$\tilde{x}(\alpha_{min}) = P(I + \alpha_{min}L)^{-1}\tilde{z}.$$

Покажем эффективность оценки $\tilde{x}(\alpha_{min})$ на следующем модельном примере. Пусть нестационарный периодический процесс удовлетворяет модели

$$y(i) = (1 + ai)\sin(2\pi 10i/n) + \varepsilon_i;$$

$$\varepsilon_i \in N(0, \sigma^2),\ n = 50;\ i = 1, \ldots, n.$$

Среднеквадратические ошибки оценивания его детерминированной составляющей по методу наименьших квадратов с ограничениями и с помощью выражения $\tilde{x}(\alpha_{min})$ при различных сочетаниях параметров a и σ представлены в таблице.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андерсон Т.** Статистический анализ временных рядов.— М.: Мир, 1976.
2. **Себер Д.** Линейный регрессионный анализ.— М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию 26 февраля 1986 г.

УДК 621.317.7

И. И. КРАСНЕНКО, В. А. ФЕДОРОВ

(*Томск*)

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВУХТОЧЕЧНОГО КОРРЕЛЯЦИОННОГО МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ ЧАСТОТЫ УЗКОПОЛОСНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Цель данной работы — исследование точностных характеристик двухточечного корреляционного метода (ДКМ) измерения частоты узкополосных стационарных случайных сигналов в сравнении с методом счета нулей (МСН), который является одним из самых популярных на