УДК 62-50

Б. М. ГРАФОВ, М. А. НОВИЦКИЙ, Ю. К. ШАЛЯПИН

(Москва)

ОБ АСИМПТОТИКЕ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ НАХОЖДЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ВЫШЕ И НИЖЕ ЗАДАННОГО УРОВНЯ

В приложениях теории случайных функций существенный интерес представляет нахождение в явном виде выражений для параметров асимптотически экспоненциальной функции распределения длительности выбросов случайного процесса за заданный уровень. а также функции распределения длительности интервала между соседними выбросами [1—3]. Особое значение указанная проблема имеет для оценки эффективности работы информационных систем с временной селекцией полезного сигнала.

Требование асимптотичности означает, что рассматриваются длительности, существенно превышающие характерное время затухания корреляционной функции случайного процесса, т. е. интервал корреляции t_k. Интервал корреляции t_k удобно определить согласно соотношению [4]

$$\int_0^\infty K_x(t)\,dt = \sigma_x^2 t_k, \tag{1}$$

где $K_x(t)$ — корреляционная функция случайного процесса $x(t)$, σ_x^2 — его дисперсия.

В рассматриваемых условиях начальные скорости и тем более ускорения, с которыми происходит пересечение заданного уровня снизу вверх или сверху вниз, не имеют какого-либо значения и от них параметры асимптотического распределения не должны зависеть.

Поскольку речь идет о вероятностном поведении случайного процесса или случайной системы, то удобно ввести в рассмотрение ансамбль из N идентичных систем, где N — достаточно большое число. Тогда, например, вероятность нахождения одной системы выше некоторого уровня a в некоторый момент времени t можно оценить по величине отношения числа систем ансамбля, находящихся выше уровня a в этот же момент времени, к полному числу систем в ансамбле.

Обозначим через n_a — число систем, находящихся выше заданного уровня a, а через p_a — число систем, находящихся в данный момент времени ниже уровня a. Их сумма совпадает с полным числом систем в ансамбле: $n_a+p_a=N$.

Системы не взаимодействуют между собой, их переход через уровень a происходит независимым образом, и, следовательно, число переходов пропорционально числу систем. По аналогии с методом, примененным Эйнштейном в работе по теории излучения [5], можно написать следующие кинетические уравнения, если, конечно, интересоваться временами, значительно превосходящими интервал корреляции t_k:

$$\begin{aligned} dn_a/dt &= \nu_a p_a - \mu_a n_a; \\ dp_a/dt &= \mu_a n_a - \nu_a p_a, \end{aligned} \tag{2}$$

где ν_a — вероятность пересечения в единицу времени отдельной системой уровня a снизу вверх, μ_a — вероятность пересечения отдельной системой уровня a сверху вниз.

На основании (2) можно утверждать, что асимптотика функции распределения длительности выбросов выше уровня a определяется решением уравнения

$$dn_a/dt = -\mu_a n_a \tag{3}$$

с начальным условием

$$n_a|_{t=0} = N. \tag{4}$$

Это решение в согласии с общими соображениями [1, 2] имеет экспоненциальную зависимость от времени:

$$n_a = Ne^{-\mu_a t}. \tag{5}$$

Следовательно, для определения параметра асимптотически экспоненциального распределения длительности выбросов за заданный уровень необходимо знать вероятность μ_a пересечения в единицу времени данного уровня a сверху вниз.

Аналогичным образом получаем

$$p_a = Ne^{-\nu_a t}. \tag{6}$$

Для вычисления вероятностей μ_a и ν_a воспользуемся следующим приемом [5]. В стационарных условиях потоки систем $\nu_a p_{as}$ и $\mu_a n_{as}$ совпадают между собой и для нормального дифференцируемого процесса с нулевым средним значением определяются соотношением [6]

$$\nu_a p_{a\text{в}} = \mu_a n_{a\text{в}} = N\omega_0 e^{-a^2/2\sigma_x^2}, \tag{7}$$

где ω_0 — средняя частота пересечения отдельной системой нулевого уровня снизу вверх или сверху вниз. Стационарное значение числа систем, находящихся над уровнем a, можно записать в виде [6]

$$n_{a\text{в}} = \int_a^\infty \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-x^2/2\sigma_x^2} dx = \frac{1}{2} NP(u), \tag{8}$$

где

$$u = a/\sigma_x \tag{9}$$

и

$$P(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_u^\infty e^{-u^2/2} du. \tag{10}$$

В итоге для вероятностей μ_a и ν_a найдем

$$\mu_a = \omega_0 e^{-a^2 2\sigma_x^2} \left[\frac{1}{2} P(u)\right]^{-1}; \tag{11}$$

$$\nu_a = \omega_0 e^{-a^2/2\sigma_x^2} \left[1 - \frac{1}{2} P(u)\right]^{-1}. \tag{12}$$

В области больших значений аргумента поведение функции дается выражением

$$P(u \gg 1) \cong (2/\pi)^{1/2} u^{-1} e^{-u^2/2}. \tag{13}$$

Поэтому при $u \gg 1$ вместо (11) и (12) имеем

$$\mu_a (u \gg 1) \cong (2\pi)^{1/2} \omega_0 a/\sigma_x; \tag{14}$$

$$\nu_a (u \gg 1) \cong \omega_0 e^{-a^2/2\sigma_x^2}. \tag{15}$$

Согласно (14), (15), вероятность пересечения в единицу времени высокого уровня сверху вниз прямо пропорциональна величине уровня, а вероятность пересечения системой высокого уровня снизу вверх экспоненциально мала.

Рассмотрим простой пример применения полученных результатов. Пусть речь идет о приеме импульсного униполярного сигнала прямоугольной формы, имеющего длительность T и величину m. Пороговое устройство срабатывает при подаче на его вход сигнала величиной a. Для вероятности ложной тревоги на основе (8) запишем

$$W_{\text{ЛТ}} = 1 - e^{-\nu_a t}, \tag{16}$$

где t — время непрерывной работы устройства, а ν_a определяется по формуле (12). Считаем, что в начальный момент времени при $t=0$ система находилась в подпороговом состоянии.

Вероятность правильного обнаружения к концу действия сигнала в соответствии с (8)

$$W_{\text{ПО}} = 1 - e^{-\nu_{m-a} T}. \tag{17}$$

Считаем опять-таки, что в момент начала действия полезного сигнала система находилась в подпороговом состоянии.

В частном случае, когда амплитуда сигнала m совпадает с порогом a, получим

$$W_{\text{ПО}} (m = a) = 1 - e^{-2\omega_0 T}, \tag{18}$$

если учесть, что, согласно (12), вероятность пересечения в единицу времени нулевого уровня вдвое превышает среднюю частоту пересечения нулевого уровня.

В заключение отметим, что кинетические уравнения (2) позволяют в принципе ответить на вопросы такого типа, как вопрос о вероятности двойного, тройного и т. д. пересечений заданного уровня в течение заданного времени, в том числе с учетом условия, что время отдельного пребывания над уровнем больше или равно некоторой величине, которая, конечно, должна значительно превышать интервал корреляции t_k.

Авторы выражают благодарность за полезные советы и обсуждения проф. А. П. Шорыгину и проф. Р. Ш. Нигматуллину.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов. О длительности выбросов случайной функции.— «ЖТФ», 1954, т. 24, вып. 1, с. 103—112.
2. В. И. Тихонов. Выбросы случайных процессов. М., «Наука», 1970.
3. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. М., «Сов. радио», 1974.
4. В. Н. Жовинский, В. Ф. Арховский. Корреляционные устройства. М., «Энергия», 1974.
5. Г. С. Ландсберг. Оптика. М., Гостехиздат, 1954.
6. А. А. Свешников. Прикладные методы теории случайных функций. Л., Судпромгиз, 1961.

Поступило в редакцию 5 января 1976 г.

УДК 535.8 : 621.378

В. Н. ВЬЮХИН

(Новосибирск)

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ УПРАВЛЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИМ ФРОНТОМ В АКУСТООПТИЧЕСКОМ ДЕФЛЕКТОРЕ

Известно, что расширения полосы частот акустооптического дефлектора (АОД) можно достичь, управляя фронтом акустической волны с помощью фазированной решетки пьезопреобразователей. Гордон [1] показал, что эта задача может быть выполнена при противофазном питании соседних элементов решетки. В этом случае, однако, возникает паразитный акустический пучок, что приводит к удвоению требуемой акустической мощности и появлению дифракции на паразитном пучке. Корпел и другие авторы [2] описали дефлекторы, в которых для управления фронтом акустической волны используется ступенчатая решетка пьезопреобразователей. Однако изготовление такого устройства технологически сложнее, чем устройства с плоской решеткой. В более общем случае задача управления акустическим фронтом решена в работе [3], где, в частности, показано, что для точного управления акустическим фронтом соседние элементы плоской решетки пьезопреобразователей должны питаться со сдвигом фаз, пропорциональным квадрату частоты. Реализовать устройство, осуществляющее эту функцию в широкой полосе частот, весьма затруднительно. В настоящей работе описан способ управления акустическим фронтом в дефлекторе с плоской решеткой, эквивалентный управлению фронтом с помощью ступенчатой решетки пьезопреобразователей.

На рис. 1, *а* показана плоская решетка пьезопреобразователей, элементы которой питаются через коаксиальные линии задержки ЛЗ—1÷ЛЗ—3, причем соседние элементы запитываются в противофазе путем подачи сигнала управления поочередно на верхний и нижний электроды преобразователей. Достаточное число элементов решетки равно 4 [2]. Фазовый сдвиг в питании соседних элементов решетки

$$\varphi = \omega T_0 - \pi, \tag{1}$$

где $\omega = 2\pi f$, f — частота сигнала управления; $T_0 = 1/2\ f_0$, f_0 — средняя частота дефлектора, на который выставляется угол Брегга $\Theta_{Б0}$.

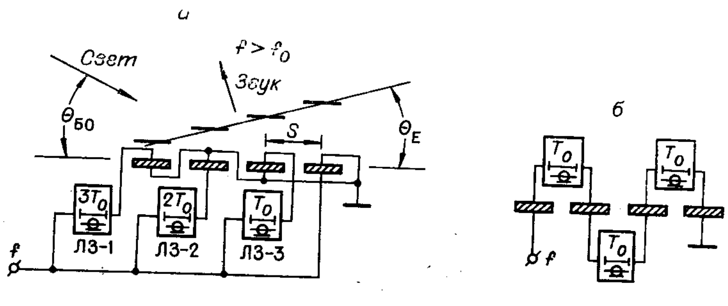

Рис. 1.