А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 3 1972

УДК 519.24

А. А. МАЛИЦКИЙ, А. Д. МАЦ, Л. Г. РАСКИН
(*Харьков*)

О ВЫБОРЕ МОМЕНТОВ ИЗМЕРЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ

Постановка задачи. Будем предполагать, что сигнал на отрезке $T_н$, $T_к$ представляется в виде

$$s(t)=a_0+a_1t+\xi(t),$$

где a_0, a_1 — параметры, подлежащие определению, а $\xi(t)$ — нестационарный случайный процесс.

Пусть в моменты $t_1,\ldots, t_n$ производятся измерения сигнала $s(t)$ и результаты измерений являются исходным материалом для получения оценок параметров a_0 и a_1. При этом $\xi(t)$ играет роль ошибки измерения. Дополнительно предположим, что измерения, проводимые в различные моменты времени, независимы, а ошибка измерения распределена по нормальному закону $N(o, \sigma(t))$, где $\sigma(t)$ — известная функция времени.

Содержательно задача формулируется следующим образом: определить моменты измерения $t_1, \ldots, t_n$ таким образом, чтобы оценки параметров a_0, a_1 были оптимальными в смысле некоторого критерия.

Потребуем, чтобы промежуток между соседними измерениями $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$ $(k=2,\ldots, n)$ был не менее заданного γ, а

$$n\gamma<T_к-T_н=T.$$

Пусть σ_i^2 — дисперсия ошибки измерения в момент $t=t_i$. Введем $\varphi_i=\frac{1}{\sigma_i^2}$.

Как известно, для корреляционной матрицы H_n оценок параметров a_0 и a_1, вычисленной по результатам n измерений, справедливо следующее соотношение:

$$H_n^{1-}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i & \sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i t_i\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i t_i & \sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i t_i^2\end{pmatrix}, \tag{1}$$

где H_n^{-1} — матрица, обратная к H_n.

Известно, что определитель корреляционной матрицы пропорционален объему эллипсоида рассеяния. Поэтому естественно определять моменты измерения $t_1, \ldots, t_n$ таким образом, чтобы минимизировать определитель $|H_n|$ матрицы H_n или, что то же, максимизировать $|H_n^{-1}|$.

Итак, задача может быть сформулирована следующим образом: отыскать набор $\{t_i^*\}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, максимизирующий $|H_n^{-1}|$ и удовлетворяющий ограничениям:

$$t_i \in [T_н, T_к] \quad (i=1, 2, \ldots, n); \quad t_k - t_{k-1} \geqslant \gamma \quad (k=2, 3, \ldots, n). \tag{2}$$

Введем в рассмотрение последовательность чисел $x_k = \Delta t_k - \gamma$ (k-1, 2, . . . , $n+1$), причем $\Delta t_1 = t_1 - (T_н - \gamma)$, а $\Delta t_{n+1} = (T_к + \gamma) - t_n$. Очевидно, что при помощи введенных x_k моменты измерения t_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ могут быть представлены следующим образом:

$$t_i = T_н + \sum_{m=1}^{i} x_m + (i-1)\gamma. \tag{3}$$

Теперь сформулированная выше задача может быть сведена к следующей задаче математического программирования: отыскать набор $\{x_k^*\}$ $(k=1, 2, \ldots, n+1)$, максимизирующий целевую функцию

$$\psi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \sum_{j=1}^{n} \varphi_j \left[T_н + \sum_{m=1}^{j} x_m + (j-1)\gamma\right]^2 - \\ - \left\{\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \left[T_н + \sum_{m=1}^{i} x_m + (i-1)\gamma\right]\right\}^2 \tag{4}$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k = T - (n-1)\gamma = T^*, \tag{5}$$

$$\text{где } x_k \geqslant 0; \; k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Экстремальная задача (4)—(5) легко сводится к обобщенной задаче Лагранжа в следующей постановке — найти векторы $\vec{x}, \vec{\omega}$, удовлетворяющие соотношениям:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i (t_i - t_k)\left[\dfrac{d\varphi_k}{dt_k}(t_i - t_k) - 2\varphi_k\right] + \omega_k - \omega_{k+1} = 0 \quad (k=1, 2, \ldots, n); \\ t_i = T_н + \sum\limits_{p=1}^{i} x_p + (i-1)\gamma; \\ \sum\limits_{k=1}^{n+1} x_k = T^*; \\ x_k\omega_k = 0; \quad x_k \geqslant 0; \quad \omega_k \geqslant 0; \quad k = 1, 2, \ldots, n+1. \end{cases} \tag{6}$$

Решения системы (6) определяют искомый набор $\{x_k^*\}$.

Равноточные измерения. Пусть дисперсия ошибок измерения не зависит от времени. Будем для простоты считать $\varphi_i = 1$, что, очевидно, не снижает общности задачи. Рассмотрение проведем, используя непосредственное выражение для определителя $|H_n^{-1}|$. Легко показать, что, если $\varphi_i = 1$, то справедливо равенство

$$|H_n^{-1}| = \sum_{i=2}^{n} \sum_{k=1}^{i-1} (t_i - t_k)^2. \tag{7}$$

Обозначим через $D(k, n-k)$ значение $|H_n^{-1}|$ в ситуации, когда k измерений группируются в левом конце интервала с шагом γ, а $n-k$ измерений — в правом конце с тем же шагом. Сама ситуация будет обозначаться $(k, n-k)$.

Теорема 1. Наибольшее значение функции (7) равно $D(m, m)$, если $n=2m$, и равно $D(m+1, m)=D(m, m+1)$, если $n=2m+1$. Доказательство проведем по индукции. Не ограничивая общности доказательства, будем считать $T_н=0$. Очевидно, что t_1^* и t_n^* должны совпадать соответственно с началом и концом интервала измерений.

Предположим, что в оптимальном распределении точки $t_1^*, \ldots, t_k^*$ $(k<m)$ сосредоточены в левом конце интервала, а точки $t_{n-k+1}^*, \ldots, t_n^*$ — в правом. Покажем, что при $k\leqslant m-1$ в оптимальном распределении t_{k+1} расположена в левом конце интервала (t_{n-k} — в правом).

Обозначим через $\psi(t_{k+1})$ сумму слагаемых функции (7), содержащих t_{k+1}. Ясно, что $\psi(t_{k+1})$ достигает наибольшего значения в одном из концов интервала изменения t_{k+1}. Так как $k\gamma\leqslant t_{k+1}\leqslant t_{k+2}-\gamma$, то сравним значения $\psi(k\gamma)$, и $\psi(t_{k+2}-\gamma)$:

$$\psi(k\gamma)=\sum_{r=1}^{k} r^2\gamma^2+\sum_{p=k+2}^{n}(t_p-k\gamma)^2;$$

$$\psi(t_{k+2}-\gamma)=\sum_{r=1}^{k}(t_{k+2}-r\gamma)^2+\sum_{p=k+2}^{n}(t_p-t_{k+2}+\gamma)^2;$$

$$\chi(t_{k+2})\equiv\psi(k\gamma)-\psi(t_{k+2}-\gamma)=\sum_{r=1}^{k} t_{k+2}(2r\gamma-t_{k+2})+$$

$$+\sum_{p=k+2}^{n}[2t_p-t_{k+2}-(k-1)\gamma]\,[t_{k+2}-(k+1)\gamma],$$

где $\chi(t_{k+2})$ —парабола, обращенная ветвями вниз. Один из корней $\chi(t_{k+2})-t_{k+2}=(k+1)\gamma$; $(k+1)\gamma\leqslant t_{k+2}\leqslant t_n-(n-k-2)\gamma$. Если $\chi[t_n-(n-k-2)\gamma]>0$, то $\chi(t_{k+2})+0$ для всех допустимых t_{k+2}.

Рассмотрим $f(t_n)\equiv\chi[t_n-(n-k-2)\gamma]=t_n^2(n-2k-1)+t_n\gamma(2kn-4k+3n-n^2-2)+\gamma^2(n-1)\ (2k-n+1)$. Легко проверить, что $t_n=(n-1)\gamma$ является корнем $f(t_n)$. Рассмотрим $f[(n-1)\gamma+\varepsilon]$, где $\varepsilon>0$ и сколь угодно мало. $f[(n-1)\gamma+\varepsilon]=\gamma\varepsilon(n^2-2kn-n)+\varepsilon^2(\ldots)$. При достаточно малом ε знак $f[(n-1)\gamma+\varepsilon]$ определяется знаком первого слагаемого. Пусть $n=2m$. Тогда при $k\leqslant m-1$ $f[(n-1)\gamma+\varepsilon]>0$. При этих же условиях $n-2k-1>0$. Следовательно, для всех $t_n>(n-1)\gamma$ $f(t_n)>0$, что и доказывает первое утверждение теоремы. (Доказательство того, что t_{n-k} при сформулированных условиях располагается в правом конце интервала, проводится аналогично.)

Пусть $n=2m+1$ и $k=m$. Тогда $f(t_n)\equiv 0$, а это означает, что $D(m+1, m)=D(m, m+1)$. Теорема доказана.

Экспоненциальное изменение дисперсии. Закон изменения дисперсии ошибок измерения очень часто описывается монотонной функцией, которую с вполне достаточной для практических целей точностью удается аппроксимировать экспонентой, или, по крайней мере, можно отыскать α_1 и α_2 такие, что

$$e^{\alpha_1 t}\leqslant\sigma^2(t)\leqslant e^{\alpha_2 t}.$$

Поэтому представляет интерес исследование случая $\sigma^2(t)=e^{\alpha t}$. Пусть, например, $\alpha>0$. Тогда система (6) может быть записана в виде

$$
\begin{cases}
\omega_n - \omega_{n+1} = \varphi_n \Phi_n; \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\omega_{k+1} - \omega_{k+2} = \varphi_{k+1} \Phi_{k+1}; \\
\omega_k - \omega_{k+1} = \varphi_k \Phi_k; \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\omega_1 - \omega_2 = \varphi_1 \Phi_1; \\
\sum_{k=1}^{n+1} x_k = T^*; \\
x_k \omega_k = 0; \quad x_k \geqslant 0; \quad \omega_k \geqslant 0; \quad k = 1, 2, \ldots, n+1,
\end{cases}
\tag{8}
$$

где $\varphi_k = e^{-\alpha t_k}$; $\Phi_k = \sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha t_i} (t_i - t_k) [\alpha (t_i - t_k) + 2]$; $t_i = T_{\text{н}} + \sum_{p=1}^{i} x_p + (i-1)\gamma$.

Ниже устанавливается структура некоторых решений системы (8).

А. Малые α. Определение. Регулярными будем называть ситуации, при которых

$$x_1 = \cdots = x_k = x_{k+3} = \cdots = x_{n+1} = 0, \quad 0 \leqslant x_{k+1} \leqslant T^*, \quad x_{k+2} = T^* - x_{k+1}.$$

Иными словами, в регулярных ситуациях первые k измерений сосредоточены в левом конце интервала $[T_{\text{н}}, T_{\text{к}}]$ с шагом γ, $n-k-1$ измерений — в правом конце, а момент $(k+1)$-го измерения удовлетворяет неравенству $t_k + \gamma \leqslant t_{k+1} \leqslant t_{k+2} - \gamma$.

Теорема 2. При $0 < \alpha \leqslant 1/T^*$ регулярные ситуации, и только они, определяют решения системы (8).

Лемма. При $0 < \alpha \leqslant 1/T$ и при любом фиксированном распределении $\{t_i\}$ справедливо неравенство $\Phi_{k_1}(\alpha) > \Phi_{k_2}(\alpha)$, где $k_1 < k_2$.

Доказательство леммы. Покажем, что для любого $i = 1, \ldots, n$ выполняется неравенство

$$e^{-\alpha t_i} (t_i - t_{k_1}) [\alpha (t_i - t_{k_1}) + 2] \geqslant e^{-\alpha t_i} (t_i - t_{k_2}) [\alpha (t_i - t_{k_2}) + 2].$$

После очевидных преобразований получаем

$$2 > \alpha (t_{k_1} + t_{k_2} - 2t_i). \tag{9}$$

Так как $(t_{k_1} - t_i) + (t_{k_2} - t_i) \leqslant 2T$, а $\alpha \leqslant 1/T$, то неравенство (9) справедливо. Требуемое неравенство между функциями получается после суммирования обеих частей неравенства (9) по всем i от 1 до n.

Доказательство теоремы. Покажем прежде всего, что регулярные ситуации могут определять решение системы (8).

Пусть при некотором $\alpha \in (0, 1/T)$ в точке $x_1 = \cdots = x_k = x_{k+2} = \cdots = x_{n+1} = 0$, $x_{k+1} = T^*$ справедливы неравенства:

$$\Phi_1(\alpha) > 0, \ldots, \Phi_k(\alpha) > 0, \quad \Phi_{k+1}(\alpha) < 0, \ldots, \Phi_n(\alpha) < 0$$

(непосредственно проверяется существование таких k, что при любом $\{t_i\}$ $\Phi_k(0) > 0$, $\Phi_{k+1}(0) < 0$. Эти неравенства выполняются в силу непрерывности функций $\Phi_k(\alpha)$ и в некоторой окрестности нуля. Наконец, из леммы следует справедливость неравенств $\Phi_i(\alpha) > 0\ (i < k)$ и

* Как видно из оценок, приводимых в доказательстве теоремы, интервал значений α, при которых справедливо утверждение теоремы, шире.

$\Phi_j(\alpha) < 0\ (j > k)$. Положим $\omega_{k+1} = 0$. Тогда, так как $\varphi_i > 0$ для всех i от 1 до n, а $\Phi_j(\alpha) > 0$ для $j = 1, \ldots, k$, все ω_i $(i = 1, \ldots, k)$ положительны. Точно так же устанавливается положительность ω_i для $i = k+2, \ldots, n+1$. Значения ω_i $(i = 1, \ldots, k, k+2, \ldots, n+1)$ определяются при фиксированном α из системы линейных уравнений соотношений (8). Таким образом, сконструированы векторы $\vec{x}$, $\vec{\omega}$, удовлетворяющие системе (8). Так как указанный набор $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$ определяет регулярную ситуацию, то, следовательно, построен пример, завершающий первую часть доказательства теоремы. Следовательно, ситуация $(k, n-k)$ определяет решение системы (8).

Осталось доказать, что при $\alpha \in (0, 1/T)$ только регулярные ситуации определяют решения системы (8).

Предположим, что это не так и некоторый произвольный набор $\{t_i\}_{i=1}^n$ определяет решение задачи Лагранжа. Тогда найдутся такие t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, t_{k+2} и t_{k+3}, что $t_k - t_{k-1} \geqslant \gamma$, $t_{k+1} - t_k > \gamma$, $t_{k+2} - t_{k+1} \geqslant \gamma$, $t_{k+3} - t_{k+2} > \gamma$. Пусть для определенности $t_k - t_{k-1} = \gamma$ и $t_{k+2} - t_{k+1} = \gamma$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда $\omega_k > 0$, $\omega_{k+1} = 0$, $\omega_{k+2} > 0$, $\omega_{k+3} = 0$. Отсюда следует, что $\Phi_k(\alpha) > 0$, $\Phi_{k+1}(\alpha) < 0$, $\Phi_{k+2}(\alpha) > 0$, $\Phi_{k+1} < 0$, а это противоречит утверждению леммы. Теорема доказана.

Таким образом, для того чтобы при достаточно малом α найти оптимальное распределение моментов измерений, достаточно сравнить значения критерия оптимальности в регулярных ситуациях.

При численном решении задачи оказываются полезными следующие замечания:

1. Так как в реальных условиях число измерений достаточно велико, а $n\gamma$ сравнимо с T, то изменение только одного момента измерения мало влияет на величину критерия оптимальности. Следовательно, при переборе можно ограничиться ситуациями типа $(k, n-k)$.

2. Нетрудно показать, что достаточно ограничиться перебором только тех ситуаций $(k, n-k)$, для которых

$$\left[\frac{n}{2} - \delta\right] < k < \left[\frac{n}{2} + \delta\right],$$

где

$$\delta = an/2\,[a + \gamma(n-1)]\,; \quad a = T - (n-2)\gamma.$$

Б. Большие α. Теорема 3. Если $\alpha \geqslant 2/\gamma$, оптимальным распределением является сосредоточение измерений слева.

Доказательство. Для доказательства теоремы, очевидно, достаточно показать, что при $\alpha \geqslant 2/\gamma$ все функции $\Phi_k(\alpha)$ неотрицательны при любом распределении $\{t_i\}$. Рассмотрим

$$\Phi_k(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha t_i}(t_i - t_k)[\alpha(t_i - t_k) + 2] \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Все слагаемые суммы при $i > k$ положительны. Установим неотрицательность остальных слагаемых при $\alpha \geqslant 2/\gamma$. Пусть $i < k$, т. е. $t_i < t_k$, а $t_i - t_k < 0$. Тогда

$$\alpha(t_i - t_k) + 2 \leqslant -\frac{2}{\gamma}(t_k - t_i) + 2 \leqslant -\frac{2}{\gamma}\gamma + 2 = 0.$$

Следует иметь в виду, что порог значений α, начиная с которого все измерения концентрируются слева, меньше $2/\gamma$, что с очевидностью следует из способа оценивания.

В заключение отметим следующее. Если решения системы (8) искать в наперед заданном классе ситуаций, то соответствующие достаточные условия часто можно получить, не предъявляя никаких предварительных требований к величине α. Так, например, если решения искать только в классе регулярных ситуаций типа $(k,\ n-k)$, то имеет место следующий факт. Для того, чтобы регулярная ситуация $(k,\ n-k)$ была решением системы (8), при заданном α достаточно выполнения неравенств в точке $x_1 = \cdots = x_k = x_{k+2} = \cdots = x_{n+1} = 0, \quad x_{k+1} = T^*$:

$$\Phi_1(\alpha) > 0, \cdots, \ \Phi_k(\alpha) > 0, \quad \Phi_{k+1}(\alpha) < 0, \cdots, \ \Phi_n(\alpha) < 0.$$

Доказательство этого утверждения очевидно.

ВЫВОДЫ

Получена система соотношений (6), решения которой определяют оптимальное распределение моментов измерений в задаче оценивания коэффициентов полинома первой степени при условии, что на результаты измерений аддитивно накладывается гауссова нестационарная помеха.

Для случая равноточных измерений получено исчерпывающее решение поставленной задачи.

При экспоненциальном изменении дисперсии помехи $(\sigma(t) = \sigma_0 e^{\alpha t}$, $\alpha > 0)$ показано, что для достаточно малых α (приводится оценка малости α) оптимальное распределение моментов измерений совпадает с одной из «регулярных» ситуаций; для достаточно больших α (приводится оценка) показано, что все измерения следует располагать в начале интервала.

Поступила в редакцию
16 февраля 1971 г.,
окончательный вариант —
4 августа 1971 г.