А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 4 1971

Теория цифровых измерительных устройств

УДК 681.2.082+621.317.08

Т. М. АЛИЕВ, Л. Р. СЕЙДЕЛЬ
(СУМГАИТ)

ОБ АНАЛИЗЕ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОГО АЛГОРИТМА АВТОМАТИЧЕСКОЙ КОРРЕКЦИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

В [1, 2] изложен способ повышения точности преобразования напряжения в цифровой код, названный авторами итерационным алгоритмом автоматической коррекции погрешностей (ИААКП), поскольку в нем реализуется последовательное приближение результатов цифрового измерения к истинному значению измеряемой аналоговой величины, и дается анализ результирующей погрешности при линейной передаточной характеристике основной измерительной цепи (грубого АЦП).

Настоящая работа посвящена исследованию сходимости ИААКП в общем виде, при произвольном характере передаточной характеристики основной измерительной цепи.

Для передаточной характеристики основной измерительной цепи в общем виде, пренебрегая погрешностью дискретности, можно записать

$$y = f(x). \tag{1}$$

Если измеряемая аналоговая величина равна $\overline{X}$, то результат прямого измерения составит

$$Y_0 = f(\overline{X}). \tag{2}$$

Для последовательно 1-го, 2-го и т. д. скорректированных результатов измерения справедливы выражения [2]:

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_0 - f(Y_0) + f(\overline{X}); \\ Y_2 &= Y_1 - f(Y_1) + f(\overline{X}); \\ Y_3 &= Y_2 - f(Y_2) + f(\overline{X}); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n &= Y_{n-1} - f(Y_{n-1}) + f(\overline{X}). \end{aligned} \tag{3}$$

Перепишем соотношения (3) в виде

$$Y_1 - Y_0 = f(\overline{X}) - f(Y_0);$$

$$Y_2 - Y_1 = f(\overline{X}) - f(Y_1);$$

$$Y_3 - Y_2 = f(\overline{X}) - f(Y_2); \qquad (4)$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$Y_n - Y_{n-1} = f(\overline{X}) - f(Y_{n-1}).$$

Если функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема в области ее определения $[X_{\min}, X_{\max}]$ и все скорректированные результаты измерения также принадлежат этой области: $Y_i \in [X_{\min}, X_{\max}]$*, то на основании теоремы конечных приращений Лагранжа можно записать:

$$\begin{aligned}
&Y_1 - Y_0 = (\overline{X} - Y_0) f'(x_1);\\
&Y_2 - Y_1 = (\overline{X} - Y_1) f'(x_2) = (\overline{X} - Y_0)[1 - f'(x_1)] f'(x_2);\\
&Y_3 - Y_2 = (\overline{X} - Y_2) f'(x_3) = (\overline{X} - Y_0)[1 - f'(x_1)][1 - f'(x_2)] f'(x_3); \qquad (5)\\
&. \; .\\
&Y_n - Y_{n-1} = (\overline{X} - Y_0) \prod_{i=1}^{n-1} [1 - f'(x_i)] f'(x_n),
\end{aligned}$$

где $x_i \in [X_{\min}, X_{\max}]$, согласно теореме Лагранжа. Если

$$|1 - f'(x)| \leqslant h < 1; \; x \in [X_{\min}, X_{\max}], \qquad (6)$$

то

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{i=1}^{n-1} [1 - f'(x_i)] = 0. \qquad (7)$$

Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} (Y_n - Y_{n-1}) = 0$. С другой стороны, по теореме Лагранжа:

$$Y_n - Y_{n-1} = (\overline{X} - Y_{n-1}) f'(x_n). \qquad (8)$$

Если $f'(x_n) \neq 0$ — условие монотонности и однозначности передаточной характеристики основной измерительной цепи, то $\lim\limits_{n \to \infty} Y_n = \overline{X}$, т. е. итерационный измерительно-вычислительный процесс сходится**.

Таким образом, ИААКП всегда сходится, если выполняется условие $1 - h \leqslant f'(x) \leqslant 1 + h$, где $0 < h < 1$, или практически:

$$0 < f'(x) < 2; \; x \in [X_{\min}, X_{\max}]. \qquad (9)$$

Условие $f'(x) < 2$ означает, что относительная мультипликативная составляющая погрешности в любой точке передаточной характеристики основной измерительной цепи меньше 100%. Из (5) и (8) получаем

$$Y_n - \overline{X} = (Y_0 - \overline{X}) \prod_{i=1}^{n} [1 - f'(x_i)], \qquad (10)$$

откуда

$$\gamma_n = \gamma_0 \prod_{i-1}^{n} [1 - f'(x_i)], \qquad (11)$$

---

* Физически $[X_{\min}, X_{\max}]$ — это область значений аналоговой величины на выходе точного ЦАП.

** Практически достижимая точность при реализации ИААКП ограничивается принятым шагом квантования по уровню, величиной быстропеременной помехи и точностью ЦАП.

где $\gamma_n = \frac{Y_n - \overline{X}}{\overline{X}} = \frac{\Delta_n}{\overline{X}}$ — относительная погрешность n-го скорректированного результата измерения; $\gamma_0 = \frac{Y_0 - \overline{X}}{\overline{X}} = \frac{\Delta_0}{\overline{X}}$ — относительная погрешность цифрового измерения без коррекции (погрешность основной измерительной цепи).

Если в некоторой точке $x_k \in [X_{\min}, X_{\max}]$ передаточной характеристики основной измерительной цепи относительная мультипликативная погрешность максимальна и равна P:

$$|1 - f'(x_k)|_{\max} = P < 1,$$

то, задаваясь требуемой погрешностью γ, можно определить заведомо достаточное число циклов коррекции

$$n = Ц\left(\frac{\lg|\gamma| - \lg|\gamma_0|}{\lg P}\right), \qquad (12)$$

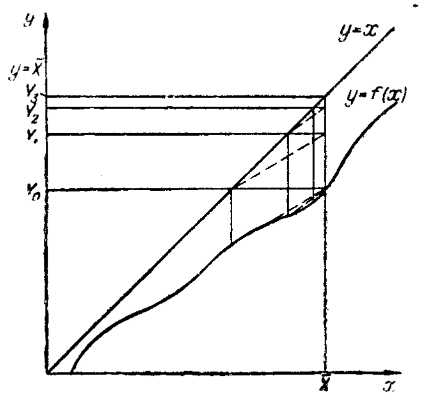

Рис. 1.

где Ц — оператор округления операнда до ближайшего большего целого числа.

Диаграмма итерационного измерительно-вычислительного процесса при нелинейной характеристике основной измерительной цепи представлена на рис. 1.

Здесь по оси абсцисс отложены значения аналоговой величины на входе прибора, а по оси ординат — значения соответствующих кодов на выходе прибора. $y=f(x)$ — реальная характеристика основной измерительной цепи; $y=x$ — идеальная характеристика, реализуемая точным ЦАП. Как видно из диаграммы, итерационный измерительно-вычислительный процесс сходится монотонно, т. е.

$$|Y_n - \overline{X}| < |Y_{n-1} - \overline{X}|. \qquad (13)$$

Аналитически это выражение легко может быть получено из (8) с учетом (6). Следует отметить, что практическая сходимость ИААКП весьма высока. Так, например, если относительная мультипликативная погрешность в любой точке передаточной характеристики основной измерительной цепи не превышает 2%, а погрешность прямого измерения $\gamma_0 = 20\%$ (за счет большой аддитивной составляющей погрешности), то из (12) найдем, что для получения результирующей погрешности $\gamma \leqslant 0{,}01\%$ заведомо достаточно двух циклов коррекции.

В частном случае, когда передаточная характеристика основной измерительной цепи линейна, ее можно представить в виде

$$Y_0 = f(\overline{X}) = \overline{X}(1+\alpha) + V, \qquad (14)$$

где α — относительная мультипликативная составляющая погрешности; V — абсолютная аддитивная составляющая погрешности. Подставляя (14) в (10), получим для n-го скорректированного результата измерения выражение, полученное ранее в [2] другим путем:

$$Y_n = \overline{X}[1 - (-\alpha)^{n+1}] + (-\alpha)^n V. \qquad (15)$$

Диаграмма измерительно-вычислительного процесса для этого случая представлена на рис. 2.

Рассмотрим проблему сходимости ИААКП для случая, когда измеряемая величина не остается постоянной в процессе измерения. Тогда для результата прямого измерения 1-го, 2-го и т. д. скорректированных результатов измерения справедливы следующие выражения:

$$
\begin{aligned}
Y_0 &= f(\overline{X}_0);\\
Y_1 &= Y_0 - f(Y_0) + f(\overline{X}_1);\\
Y_2 &= Y_1 - f(Y_1) + f(\overline{X}_2);\\
&\dots\dots\dots\dots\\
Y_n &= Y_{n-1} - f(Y_{n-1}) + f(\overline{X}_n).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

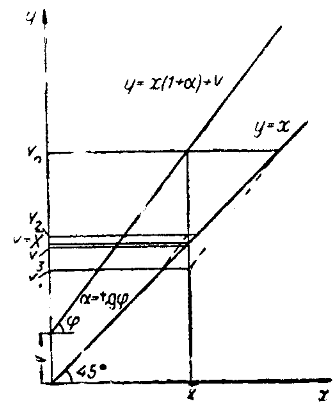

Рис. 2.

Здесь $\overline{X}_i$ — истинное значение измеряемой величины при i-м ее измерении. Используя теорему конечных приращений Лагранжа, соотношения (16) можно переписать в виде

$$
\begin{aligned}
Y_1 - \overline{X}_1 &= (Y_0 - \overline{X}_0)\,[1 - f'(x_1)] - \delta\overline{X}_1\,[1 - f'(x_1)];\\
Y_2 - \overline{X}_2 &= (Y_0 - \overline{X}_0)\,[1 - f'(x_1)]\,[1 - f'(x_2)] -\\
&\quad - \delta\overline{X}_1\,[1 - f'(x_1)]\,[1 - f'(x_2)] - \delta\overline{X}_2\,[1 - f'(x_2)];\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
Y_n - \overline{X}_n &= (Y_0 - \overline{X}_0)\prod_{i=1}^{n}[1 - f'(x_i)] - \sum_{i=1}^{n}\delta\overline{X}_i\prod_{j=i}^{n}[1 - f'(x_j)].
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Здесь $\delta\overline{X}_i = \overline{X}_i - \overline{X}_{i-1}$ — изменение измеряемой величины за время между $(i-1)$-м и i-м ее измерениями. $Y_i \in [X_{\min}, X_{\max}]$ — по условию; $X_i \in [X_{\min}, X_{\max}]$ — согласно теореме Лагранжа. Из (17)

$$
Y_n - \overline{X}_n = \Delta_n = \Delta_0 \prod_{i=1}^{n}[1 - f'(x_i)] + \Delta_n^t. \tag{18}
$$

Здесь второй член в правой части равенств (17) и (18) суть динамическая погрешность ИААКП в режиме непрерывного измерения. Если относительная мультипликативная составляющая статической погрешности в любой точке передаточной характеристики основной измерительной цепи достаточно мала: $|1 - f'(x_i)| \ll 1$, что практически всегда имеет место, то, пренебрегая членами более высоких порядков малости, из (17) и (18) получим

$$
\Delta_n = \Delta_n^t = -\delta\overline{X}_n\,[1 - f'(x_n)]. \tag{19}
$$

Если представить $f(x) = x + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — текущая абсолютная погрешность основной измерительной цепи, то при малом $\delta\overline{X}_n$ можно записать

$$
\Delta_n = \delta\overline{X}_n\,\varphi'(x_n) \approx \varphi(\overline{X}_n) - \varphi(\overline{X}_{n-1}). \tag{20}
$$

Так, например, если в условиях приведенного выше примера $(\gamma = 20\,\%;\ |\varphi'(x)| \leqslant P = 0{,}02)$ предположить, что измеряемая величина изменяется за время между соседними ее измерениями, но не более чем на 5% $\left(\left|\frac{\delta X_i}{\overline{X}_i}\right| \leqslant 5\%\right)$, то, как видно из (17), погрешность скорректированных результатов измерения, уже начиная со второго, не будет превышать 0,1%. Для получения большей точности при заданной динамике измеряемого процесса необходимо повысить быстродействие прибора.

Следует подчеркнуть, что с точки зрения интерполяции измеряемой величины между отдельными ее измерениями бессмысленно требовать от отдельного измерения погрешности, меньшей чем 0,1%, если изменение измеряемой величины от измерения к измерению может достигать 5%. Следует, очевидно, разумно согласовывать быстродействие измерительного прибора с динамикой измеряемого процесса. Если положить, что относительное изменение измеряемой величины между соседними ее измерениями не должно более чем десятикратно превышать заданную погрешность измерения $\left(\left|\frac{\delta \overline{X}_i}{\overline{X}_i}\right| \leqslant 10\,\gamma\right)$, то из (20) видно, что результатирующая погрешность ИААКП будет заведомо не больше заданной, если относительная мультипликативная погрешность основной измерительной цепи в любой точке передаточной характеристики не будет превышать 10%:

$$|\varphi'(x)| \leqslant 0{,}1;\; x \in [X_{\min},\, X_{\max}],$$

что вполне приемлемо и практически всегда имеет место.

Представляет интерес рассмотрение еще более общего случая, когда и измеряемая величина, и передаточная характеристика основной измерительной цепи не остаются постоянными в процессе измерения. Полагая для начала, что передаточная характеристика основной измерительной цепи не меняется за время одного цикла коррекции (изменение передаточной характеристики за время одного цикла коррекции есть быстропеременная случайная погрешность, которая, как будет показано ниже, не исключается при реализации ИААКП), а меняется лишь от цикла к циклу, можем записать:

$$\begin{aligned}
Y_0 &= f_0(\overline{X}_0);\\
Y_1 &= Y_0 - f_1(Y_0) + f_1(\overline{X}_1) = Y_0 + (\overline{X}_1 - Y_0)\, f_1'(x_1);\\
Y_2 &= Y_1 - f_2(Y_1) + f_2(\overline{X}_2) = Y_1 + (\overline{X}_2 - Y_1)\, f_2'(x_2);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Y_n &= Y_{n-1} - f_n(Y_{n-1}) + f_n(\overline{X}_n) = Y_{n-1} + (\overline{X}_n - Y_{n-1})\, f_n'(x_n).
\end{aligned}$$

Откуда аналогично изложенному выше получаем

$$Y_n - \overline{X}_n = (Y_0 - \overline{X}_0) \prod_{i=1}^{n} [1 - f_i'(x_i)] - \sum_{i=1}^{n} \delta \overline{X}_i \prod_{j=i}^{n} [1 - f_j'(x_j)], \quad (21)$$

где $f_i(x_i)$ — передаточная функция основной измерительной цепи в момент i-го цикла коррекции. Условием сходимости ИААКП в этом случае является неравенство

$$|1 - f_i(x_i)| \leqslant h < 1;\; x_i \in [X_{\min},\, X_{\max}]. \quad (22)$$

Практически для результирующей погрешности получаем выражение, аналогичное выражению (19):

$$\Delta_n = -\delta \overline{X}_n [1 - f_n'(x_n)] = \delta \overline{X}_n \varphi_n'(x_n). \quad (23)$$

Таким образом, изменение передаточной характеристики основной измерительной цепи между циклами коррекции не оказывает влияния на результирующую точность ИААКП. В самом общем случае, с учетом изменения передаточной функции основной измерительной цепи за время цикла коррекции, получаем для результирующей погрешности выражение

$$\Delta_n = \Delta_0 \prod_{i=1}^{n} [1 - f'_{2i-1}(x_i)] - \sum_{i=1}^{n} \delta \overline{X}_i \prod_{j=i}^{n} [1 - f'_{2j-1}(x_j)] + \\ + \sum_{i=1}^{n} \Delta f_{2i}(\overline{X}_i) \prod_{j=i}^{n-1} [1 - f'_{2j+1}(x_j)], \quad (24)$$

если $\prod_{k}^{m} [1 - f'_{2k+1}(x_k)] \equiv 1$ при $k>m$. Здесь $\Delta f_{2i}(\overline{X}_i) = f_{2i}(\overline{X}_i) - f_{2i-1}(\overline{X}_i)$; $f_{2i}(x)$ — вид передаточной функции основной измерительной цепи при измерении определяемой аналоговой величины в i-м цикле коррекции; f_{2i-1} — то же, при измерении аналоговой величины с выхода ЦАП в i-м цикле коррекции. Учитывая, что $|1 - f'_i(x)| \ll 1$; $x \in [X_{\min}, X_{\max}]$, и пренебрегая членами более высоких порядков малости, найдем для результирующей погрешности выражение

$$\Delta_n = \delta \overline{X}_n \varphi'_{2n-1}(x_n) + \Delta f_{2n}(\overline{X}_n). \quad (25)$$

Если $\delta \overline{X}_n$ достаточно мало, то из (25) определим

$$\Delta_n \approx \varphi_{2n}(\overline{X}_n) - \varphi_{2n-1}(\overline{X}_{n-1}). \quad (26)$$

Из (25) и (26) видно, что, как уже отмечалось выше, погрешности за счет изменения передаточной характеристики основной измерительной цепи внутри цикла коррекции не исключаются при реализации ИААКП. Однако следует отметить, что такие погрешности не накапливаются, а корректируются наряду с другими погрешностями в каждом следующем цикле коррекции.

Аналогичным образом ИААКП является устойчивым ко всякого рода перемежающимся отказам устройства (сбоям в арифметическом устройстве, ЦАП, счетчике импульсов), к импульсным наводкам и т. д. Как бы ни велика была погрешность вследствие такого рода отказов в k-м цикле коррекции, практически всегда уже в $(k+2)$-м или $(k+3)$-м цикле коррекции устройство вновь выходит на режим точного измерения. Это дополнительно повышает эффективность применения ИААКП в цифровых измерительных приборах и преобразователях.

Действительно, предположим, что в k-м цикле коррекции в устройстве произошел сбой, из-за которого погрешность k-го скорректированного результата измерения достигла $\gamma_k = 1000\%$. Полагая, как и в приведенных выше примерах, что $|\varphi'(x)| \leqslant P = 0{,}02$ и заданная погрешность $\gamma = 0{,}01\%$, и подставляя значения P, γ и γ_k (вместо γ_0) в (12), найдем, что уже в $(k+3)$-м цикле коррекции результирующая погрешность будет заведомо меньше заданной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Р. Сейдель, Т. М. Алиев и А. А. Тер-Хачатуров. Способ преобразования напряжения в цифровой код. Авторское свидетельство № 219290.— ИПОТЗ, 1968, № 18.
2. Т. М. Алиев, Л. Р. Сейдель, А. А. Тер-Хачатуров. Способ повышения точности цифрового измерения аналоговых величин.— Автометрия, 1969, № 5.

Поступила в редакцию
8 июля 1970 г.