А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 5 1970

АНАЛОГОВЫЕ ЭЛЕКТРОИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ, КОНТРОЛЬНЫЕ И ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ И УСТРОЙСТВА

УДК 53.072 : 51.08

Э. И. КУЧЕРЕНКО, В. И. ПЕТУХОВ
(Рязань)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВХОДНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА НЕЛИНЕЙНЫЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ НА ВЫХОДЕ

В последние годы большое внимание уделяется разработке методов решения обратных задач, заключающихся в определении входных воздействий динамических систем по известным выходным параметрам.

Так, в теории оптимального управления важное значение уделяется задаче наблюдения, т. е. нахождению положения управляемой системы по наблюдаемым выходным параметрам. В [1] сформулировано условие наблюдаемости для линейных систем, при котором однозначно находится положение управляемой системы в фазовом пространстве. В [2] оно расширено применительно к некоторым классам нелинейных систем. Различные аспекты наблюдаемости систем с неполной информацией рассматриваются в [3, 4]. Другому классу обратных задач посвящена работа [5]. В ней исследуются оценки регулярных и случайных колебаний измеряемой физической величины по результатам измерений. Предполагается, что измерительный прибор, т. е. канал преобразования, является линейной динамической моделью. Однако нередко такое приближение оказывается недопустимым, например, при учете динамики гироскопических и маятниковых измерительных систем.

Ниже рассмотрена возможность определения регулярного входного воздействия при нелинейности преобразования, когда уравнение связи имеет вид

$$L\,\varphi + K\,\varphi = f\,, \tag{1}$$

где $L\,\varphi$ — оператор Лапласа;

$$K\,\varphi = \sum_{i=1}^{N_1} a_i\,\varphi^{k_i} + \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{n} a_{jl}\,(\varphi'_{xl})^{k_j};$$

$f=f(X)$ — показания измерительного устройства; $\varphi=\varphi(X)$ — функция, подлежащая определению; $X=X\ (x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n)$ — независимые переменные.

Оператор Лапласа для n переменных описывается выражением

$$L\,\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2}\,. \tag{2}$$

При одной переменной и четном порядке старшей производной

$$L\varphi = (-1)^n \frac{d^{2n}\varphi}{d x^{2n}}, \tag{3}$$

а при нечетном —

$$d^{2n-1}\varphi$$

ряют условию теорем вложения С. Л. Соболева [6]. Коэффициенты a_i, (4) a_{jl} непрерывны в области $\overline{\Omega}=\Omega+S$. Функция f имеет конечную норму во вводимых пространствах, т. е. ограничена по модулю.

Для упрощения решения введем однородные краевые условия

$$\varphi/_S = 0, \tag{5}$$

т. е. примем, что искомая функция φ обращается в нуль на границе области Ω, что всегда возможно достигнуть линейной заменой переменных.

Применим к (1) линейный оператор L^{-1}, т. е. обратный L. Тогда

$$\varphi - T\varphi = f_0, \tag{6}$$

где $T\varphi = \int\limits_{\Omega} G(X, P)\, K\varphi\, d\,\Omega$; $P = P(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$; $G(X, P)$ — функция Грина уравнения $L\varphi=0$ при выполнении (5) [7]; $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ — координаты точки P в области Ω; $f_0 = L^{-1}f$ — изображение f.

Как показано в [8], условия существования и единственности решения (6) выполняются при значении постоянной Липшица

$$\gamma = \sqrt{\operatorname{mes}\Omega}\; \overline{G}\, N\, r\, a\, R^{r-1} M^r < 1, \tag{7}$$

где $\operatorname{mes}\Omega$ — мера области Ω;

$$\overline{G} = \begin{cases} \sqrt{\int\limits_{\Omega} [G'(X, P)]^2\, d\,\Omega} & \text{для } n \text{ переменных;} \\ \max\limits_{\Omega} |G(X, P)| & \text{для одной переменной;} \end{cases}$$

$N = N_1 + N_2$; $r = \max\begin{cases} k_i; \\ k_j \end{cases}$ $a = \max\limits_{\Omega}\begin{cases} |a_i|; \\ |a_{jl}|; \end{cases}$ R — радиус сферы пространства H_0; M — постоянная теоремы вложения С. Л. Соболева; H_0 — пространство С. Г. Михлина [7], в котором определяется φ. В качестве R следует выбирать максимально возможное значение $|\varphi|_{H_0}$. Если $\gamma \geqslant 1$, то необходимо разбить интервал наблюдения на несколько частей, для которых выполняется (7). При решении (1) с учетом (5) может быть использован метод Б. Г. Галеркина [7], в котором результат представляется в виде полинома

$$\varphi_r = b_1\psi_1 + b_2\psi_2 + \cdots + b_r\psi_r, \tag{8}$$

где $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ — система координатных функций пространства H_0, каждая из которых удовлетворяет краевым условиям (5). Коэффициенты $b_1, b_2, \ldots, b_r$ находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} \gamma_{l1}(b_1, b_2, \ldots, b_r) = 0; \\ \gamma_{l2}(b_1, b_2, \ldots, b_r) = 0; \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \gamma_{lr}(b_1, b_2, \ldots b_r) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

получающейся при ортогонализации на Ω невязки между левой и правой частями уравнения (1) к координатным функциям при подстановке φ_r, т. е.

$$\int_\Omega (L\,\varphi_r + K\,\varphi_r - f)\,\psi_h\, d\,\Omega \qquad (10)$$

при $h=1, 2, 3, \ldots, r$.

При разбиении интервала наблюдения на части необходимо для каждой части Ω_S доопределять краевые условия.

Пример. Необходимо определить изменение φ, если зарегистрировано равномерное изменение f от 0 до -1 за интервал времени t, равный 1 *сек*. Уравнение связи имеет вид

$$\varphi'' + 3\varphi^2 = f. \qquad (11)$$

Заданы краевые условия $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, и известно, что $\varphi_{\max} < 0{,}5$. Так как $f = -t$, то можно переписать (11) в виде

$$\varphi'' + 3\varphi^2 = -t. \qquad (12)$$

В одномерном случае мерой Ω является длина отрезка, т. е. mes $[0{,}1] = 1$. Согласно (1) и (7),

$$N = N_1 + N_2 = 1;\; r = 2;\; a = 3.$$

Запишем функцию Грина уравнения (11)

$$G(t, \rho) = \begin{cases} t\,(1-\rho) \text{ при } t < \rho; \\ \rho\,(1-t) \text{ при } t \geqslant \rho; \end{cases}$$

при этом $\bar{G} = \max |G(t, \rho)| = 1$.

Постоянная теоремы вложения равна отношению норм в H и H_0 для произвольного элемента φ, где H — гильбертово пространство.

Например, считая $\varphi = t(t-1)$, получим:

$$\|\varphi\|_H^2 = \int_0^1 \varphi^2\, d\,t = \frac{1}{30};\quad \|\varphi\|_{H_0}^2 = \int_0^1 (\varphi')^2\, d\,t = \frac{1}{3},$$

откуда

$$M \geqslant \sqrt{\frac{\|\varphi\|_H^2}{\|\varphi\|_{H_0}^2}} \approx \frac{1}{3};\; R = 0{,}5 > \varphi_{\max}.$$

Подставив полученные числовые значения в (7), найдем $\gamma = 1$, т. е. условия существования и единственности решения не выполняются. Разделим Ω на две равные части $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ и обозначим $\varphi_k = \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$.

Чтобы сделать краевые условия однородными для $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, введем величину z_1, связанную с φ линейной зависимостью

$$\varphi = z_1 + 2t\,\varphi_k, \qquad (13)$$

для которой краевые условия примут вид

$$z_1(0) = z_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \qquad (13')$$

Аналогично для $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$ введем зависимость

$$\varphi = z_2 + (2 - 2t)\,\varphi_k, \tag{14}$$

для которой краевые условия описываются выражением

$$z_2\left(\frac{1}{2}\right) = z_2(1) = 0. \tag{14'}$$

Подставив z_1 и z_2 в (12), получим:

$$z_1'' + 3\,(z_1 + 2t\,\varphi_k)^2 + t = 0; \tag{15}$$

$$z_2'' + 3\,[z_2 + (2 - 2t)\,\varphi_k]^2 + t = 0. \tag{16}$$

С уменьшением длины участка наблюдения $\overline{G}$ и M уменьшаются, т. е. для (15), (16) выполняется (7).

Для (15) и (13′) за систему координатных функций можно принять $\left(t^2 \quad \frac{1}{2}\,t\right) t^h$ при $h=1, 2, \ldots, r$. В первом приближении (при $h=1$)

$$z_{11} = \left(t^2 - \frac{1}{2}\,t\right) b_{11}. \tag{17}$$

Подставив (17) в (15) и проинтегрировав в интервале $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$, получим

$$9b_{11}^2 + 2240b_{11} - 168b_{11}\,\varphi_k + 1008\varphi_k^2 + 280 = 0. \tag{18}$$

Аналогично для (16) и (14′) система координатных функций на $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$ примет вид

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)(t - 1)\,t^h \text{ при } h = 1,\ 2,\ \ldots,\ r,$$

т. е. при $h=1$

$$z_{21} = \left(t - \frac{1}{2}\right)(t - 1)\,b_{21}. \tag{19}$$

Используя (16), найдем

$$9b_{21}^2 + 2240b_{21} - 168b_{21}\,\varphi_k + 1008\varphi_k^2 + 840 = 0. \tag{20}$$

Для определения трех неизвестных $(a_{11},\ a_{21},\ \varphi_k)$ необходимо еще одно уравнение. Получим его, приравняв производные от φ по t из (13) и (14) при $t = \frac{1}{2}$:

$$b_{11}+b_{21}+b\varphi_1=0. \tag{21}$$

Решив систему уравнений (18), (20), (21), будем иметь значения: $\varphi_k = 0{,}063$; $b_{11} = -0{,}131$; $b_{21} = -0{,}374$; если подставим их в (17), (19), (13), (14), определим изменение φ:

$$\varphi = \begin{cases} (-0{,}131t + 0{,}191)\,t \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 0{,}5; \\ -0{,}374t^2 + 0{,}435t - 0{,}061 \text{ при } 0{,}5 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

С увеличением h точность расчетов улучшается, так как метод Галеркина для системы (15), (16) с соответствующими краевыми условиями сходится в H_0 [9].

При решении практических задач уравнения могут иметь более сложный вид, чем (11). Поэтому для ускорения расчетов целесообразно применять вычислительные машины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Калман. Об общей теории управления. Труды I Международного конгресса ИФАК, т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1961.
2. Ю. М. Костюковский. О наблюдаемости нелинейных управляющих систем. Автоматика и телемеханика, 1968, № 9.
3. А. А. Красовский. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
4. Н. Н. Красовский, А. Б. Куржанский. К вопросу о наблюдаемости систем с запаздыванием.— Дифференциальные уравнения, 1966, т. 2, вып. 3.
5. Г. И. Марчук, Ю. П. Дробышев. Некоторые вопросы линейной теории измерений.— Автометрия, 1967, № 3.
6. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд-во ЛГУ, 1950.
7. С. Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике. М., Гостехиздат, 1957.
8. Э. И. Кучеренко. К вопросу о существовании решений нелинейных дифференциальных уравнений.— Материалы II конференции молодых научных работников г. Казани. Механико-математическая секция. Казань, Таткнигоиздат, 1965.
9. Э. И. Кучеренко. О двух комбинированных методах интегрирования дифференциальных уравнений.— Труды РРТИ, вып. 8. Тематический сборник статей по дифференциальным уравнениям. Рязань, 1968.

Поступила в редакцию
11 марта 1969 г.,
окончательный вариант —
13 ноября 1969 г.