АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 5 1970

УДК 621.391

В. М. ЕФИМОВ, З. А. ЛИВШИЦ
(Новосибирск)

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ СОКРАЩЕНИЯ ИЗБЫТОЧНОСТИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРЕДСКАЗЫВАЮЩИХ АЛГОРИТМОВ

Анализу эффективности алгоритмов сжатия с предсказанием посвящена обширная литература (см., например, [1] и обзорную статью [2]).

1. В настоящей работе рассматривается следующая модель сжатия данных. Подлежащий обработке сигнал есть последовательность квантованных по времени (с шагом θ) и уровню (с шагом q) отсчетов случайного процесса. Для сжатия данных используется линейный алгоритм предсказания, т. е. по последовательности отсчетов процесса $x(0)$, $x(\theta)$, $x(2\theta)$, . . . , $x(k\theta)$ строится последовательность $y(0)$, $y(\theta)$, $y(2\theta)$, . . . , $y(k\theta)$ следующим образом: по начальному отрезку последовательности $y(0)$, $y(\theta)$, $y(2\theta)$, ... , $y((k-1)\theta)$ находится оценка $\hat{x}(k\theta) = \sum_{m=0}^{k-1} \alpha_m y(m\theta)$ для $x(k\theta)$. Если $|x(k\theta) - \hat{x}(k\theta)| \leqslant \varepsilon$, то $y(k\theta)$ полагается равным $\hat{x}(k\theta)$ и значение отсчета $x(k\theta)$ оказывается избыточным; если же $|x(k\theta) - \hat{x}(k\theta)| > \varepsilon$, то $y(k\theta)$ полагается равным $x(k\theta)$. Здесь ε — допустимая ошибка предсказания. Использование таких алгоритмов позволяет не передавать избыточные отсчеты.

2. Степень сокращения избыточности характеризуется вероятностным распределением числа непередаваемых отсчетов после каждого переданного. Пусть $Q(n/x_0)$ — вероятность события: число непередаваемых отсчетов больше или равно n при условии, что значение последнего переданного отсчета равно x_0. Тогда (см., например, [3]) математические ожидания и дисперсия числа непереданных отсчетов выражаются формулами:

$$\bar{n}(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} Q(n/x_0);$$

$$\overline{(n(x_0) - \bar{n}(x_0))^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} n\,Q(n/x_0) - \sum_{n=1}^{\infty} Q(n/x_0) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} Q(n/x_0)\right)^2.$$

Будем рассматривать следующие два типа процессов: винеровский с переходной плотностью вероятности

$$p_t(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(v-u)^2}{2\sigma^2 t}\right]$$

и стационарный марковский гауссов процесс с переходной плотностью

$$p_t(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{1-\rho^2(t)}} \exp\left[-\frac{(v-u\rho(t))^2}{2\sigma^2(1-\rho^2(t))}\right],$$

где $\rho(t) = \exp[-\beta|t|]$.

Для предсказания марковских процессов при шаге квантования по уровню $q=0$ использование отсчетов, предшествующих последнему переданному, не несет никакой дополнительной информации; влияние этих отсчетов при малом шаге квантования по уровню также невелико. Поэтому на практике используются и далее будут рассматриваться лишь прогнозы вида: $\hat{x}(n\theta) = \alpha y((n-1)\theta)$.

3. Пусть обрабатываемый сигнал есть стационарный марковский процесс; шаг квантования по времени равен θ; $q=0$.

Нетрудно показать, что оптимальным в смысле максимизации среднего числа непередаваемых отсчетов является предсказание вида

$$\hat{x}(k\theta) = \rho(\theta)\, y((k-1)\theta).$$

При таком прогнозе вероятности $Q(n/x_0)$ не зависят от x_0 и выражаются формулой

$$Q(n) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx_1\, p_\theta(0, x_1) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \ldots \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx_n\, p_\theta(x_{n-1}, x_n).$$

Тогда

$$Q(1) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right);$$

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)\left[\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{1-\rho(\theta)}}{\sigma\sqrt{1+\rho(\theta)}}\right) + \Phi\left(\frac{\sigma\sqrt{1+\rho(\theta)}}{\varepsilon\sqrt{1-\rho(\theta)}}\right)\right]^{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant Q(n) \leqslant \left[2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)\right]^n,$$

где $\Phi(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] dx$. Действительно, первое соотношение очевидно, а неравенства могут быть получены по индукции с учетом того, что максимальное значение внутреннего интеграла равно $2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)$, а минимальное —

$$\left[\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{1-\rho(\theta)}}{\sigma\sqrt{1+\rho(\theta)}}\right) + \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{1-\rho(\theta)}}{\sigma\sqrt{1-\rho(\theta)}}\right)\right].$$

Отсюда следует, что

$$\frac{2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)}{1-\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{1-\rho(\theta)}}{\sigma\sqrt{1+\rho(\theta)}}\right) - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{1+\rho(\theta)}}{\sigma\sqrt{1-\rho(\theta)}}\right)} \leqslant \bar{n} \leqslant \frac{2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)}{1-2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)};$$

$$\frac{4\,\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)}{\left[1-\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{1-\rho(\theta)}}{\varepsilon\sqrt{1+\rho(\theta)}}\right)-\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{1+\rho(\theta)}}{\sigma\sqrt{1-\rho(\theta)}}\right)\right]^2}-$$

$$-\frac{2\,\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)}{\left[1-2\,\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)\right]^2}\leqslant\overline{(n-\overline{n})^2}\leqslant\frac{4\,\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)}{\left[1-2\,\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)\right]^2}-$$

$$-\frac{2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{1-\rho(\theta)}}{\sigma\sqrt{1+\rho(\theta)}}\right)-\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{1+\rho(\theta)}}{\sigma\sqrt{1-\rho(\theta)}}\right)+2\,\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)\right]}{\left[1-\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{1-\rho(\theta)}}{\sigma\sqrt{1+\rho(\theta)}}\right)-\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{1+\rho(\theta)}}{\sigma\sqrt{1-\rho(\theta)}}\right)\right]^2}.$$

Указанные оценки близки при малых значениях $\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}$.

Именно:

$$\lim_{\frac{\varepsilon}{\sigma}\to 0}\frac{\overline{n}_{в}}{\overline{n}_{н}}=1;\quad \lim_{\frac{\varepsilon}{\sigma}\to 0}\frac{\overline{(n-\overline{n})^2_{в}}}{\overline{(n-\overline{n})^2_{н}}}=1;$$

при этом

$$\frac{\overline{n}_{в}-\overline{n}_{н}}{\overline{n}_{в}}\sim\frac{\rho^2(\theta)}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)^3;$$

$$\overline{(n-\overline{n})^2_{в}}\sim\overline{(n-\overline{n})^2_{н}}\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}.$$

4. Проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, для винеровского процесса можно показать, что оптимальным в этом случае прогнозом является

$$\hat{x}\,(k\,\theta)=y\,((k-1)\,\theta)$$

и справедливы следующие соотношения:

$$Q\,(1)=2\,\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right);$$

$$2\,\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)\left[\Phi\left(\frac{2\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)\right]^{n-1}\leqslant Q\,(n)\leqslant\left[2\,\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)\right]^n;$$

$$\frac{2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)}{1-\Phi\left(\frac{2\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)} \leqslant \bar{n} \leqslant \frac{2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)}{1-2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)};$$

$$\frac{4\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)}{\left[1-\Phi\left(\frac{2\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)\right]^2} - \frac{2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)}{\left[1-2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)\right]^2} \leqslant \overline{(n-\bar{n})^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)}{\left[1-2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)\right]^2} - \frac{2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{2\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)+2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)\right]}{\left[1-\Phi\left(\frac{2\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)\right]^2}.$$

При малых значениях $\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}$

$$\frac{\bar{n}_{\text{в}}-\bar{n}_{\text{н}}}{\tilde{n}_{\text{в}}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)^3;$$

$$\overline{(n-\bar{n}_{\text{в}})^2} \sim \overline{(n-\bar{n}_{\text{н}})^2} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}.$$

5. Приведем также оценки вероятностей $Q(n)$ при ненулевом шаге квантования по уровню, когда прогноз имеет вид

$$\hat{x}(k\theta) = y((k-1)\theta)$$

(предполагается, что границы допустимых значений ошибки находятся на расстоянии ε от середины кванта). Для винеровского процесса

$$\left[\Phi\left(\frac{\varepsilon-0,5q}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)+\Phi\left(\frac{\varepsilon+0,5q}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)\right]\left[\Phi\left(\frac{2\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)\right]^{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant Q(n) \leqslant \left[2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)\right]^n.$$

Для марковского стационарного гауссова процесса

$$Q(n/kq) \geqslant \left[\Phi\left(\frac{\varepsilon+kq(1-\rho(\theta))+0,5q\rho(\theta)\operatorname{sign}k}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)+\right.$$

$$\left.+\Phi\left(\frac{\varepsilon-kq(1-\rho(\theta))-0,5q\rho(\theta)\operatorname{sign}k}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\Phi\left(\frac{\varepsilon(1+\rho(\theta))+|k|q(1-\rho(\theta))}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)+\Phi\left(\frac{\varepsilon(1-\rho(\theta))-|k|q(1-\rho(\theta))}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)\right]^{n-1};$$

$$Q(n/kq) \leqslant 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)\left[\Phi\left(\frac{\varepsilon+kq(1-\rho(\theta))}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)+\right.$$

$$\left.+\Phi\left(\frac{\varepsilon-kq(1-\rho(\theta))}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)\right]^{n-1} \qquad \text{при } |k| \leqslant \frac{1}{2(1-\rho(\theta))};$$

$$Q(n/kq) \leqslant \left[\Phi\left(\frac{\varepsilon + kq\,(1-\rho(\theta)) + 0{,}5\,q\,\rho(\theta)\,\mathrm{sign}\,k}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right) + \right.$$

$$\left. + \Phi\left(\frac{\varepsilon - kq\,(1-\rho(\theta)) - 0{,}5\,q\,\rho(\theta)\,\mathrm{sign}\,k}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)\right] \times$$

$$\times \left[\Phi\left(\frac{\varepsilon + kq\,(1-\rho(\theta))}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right) + \Phi\left(\frac{\varepsilon - kq\,(1-\rho(\theta))}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)\right]^{n-1}$$

при $\dfrac{1}{2(1-\rho(\theta))} < |k| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{q(1-\rho(\theta))}$;

$$Q(n/kq) \leqslant \left[\Phi\left(\frac{\varepsilon(1-\rho(\theta)) + |k|\,q\,(1-\rho(\theta))}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right) + \right.$$

$$\left. + \Phi\left(\frac{\varepsilon(1+\rho(\theta)) - |k|\,q\,(1-\rho(\theta))}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)\right] \times$$

$$\times \left[\Phi\left(\frac{\varepsilon + kq\,(1-\rho(\theta)) - 0{,}5\,q\,\rho(\theta)\,\mathrm{sign}\,k}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right) + \right.$$

$$\left. + \Phi\left(\frac{\varepsilon - kq\,(1-\rho(\theta)) + 0{,}5\,q\,\rho(\theta)\,\mathrm{sign}\,k}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\theta)}}\right)\right]^{n-1}$$

при $|k| > \dfrac{\varepsilon}{q(1-\rho(\theta))}$.

Заметим, что из приведенных в этом пункте формул легко перейти к случаю отсутствия квантования по уровню: надо устремить q к нулю, так чтобы kq стремилось к x_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эрман. Анализ некоторых способов сжатия полосы частот путем устранения избыточности.— ТИИЭР, 1967, т. 55, № 3.
2. Л. Дэвиссон. Теоретический анализ систем сжатия данных.— ТИИЭР, 1968, т. 56, № 2.
3. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложение, т. 1. М., «Мир», 1967.

Поступила в редакцию
22 мая 1970 г.