АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 3 1970

УДК 62-506

М. Г. ЗОТОВ
(Москва)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СУЩЕСТВЕННО НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБЪЕКТА В ПРОЦЕССЕ НОРМАЛЬНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Задача оценки динамических характеристик нестационарных объектов весьма актуальна. Результаты оценки могут быть использованы как для построения беспоисковых самонастраивающихся систем, так и для обработки телеметрической информации с целью улучшения динамических характеристик систем. В частности, к таким объектам, где может найти применение излагаемый метод идентификации, могут быть отнесены различные типы летательных аппаратов [1, 2]. Изменение параметров летательного аппарата обусловлено изменением веса за счет вы- горания топлива, изменением скорости и высоты полета. Характерист- ки некоторых систем управления существенно зависят от расстоя- -ния между летательным аппаратом и целью [2]. Причем необходимо с- ния тить, что эти характеристики за сравнительно небольшой отрезок -тме- мени могут изменяться в несколько раз. Характер изменения па- . вре- ров обычно известен (например, априори известно, что изменени- рамет- фициента во времени при второй производной выходного сигнал- ле коэф- быть достаточно хорошо описано полиномом первой степени -а может возникает задача определения параметра этого полинома , и тогда наблюдения). в процессе

В связи с этим представляет интерес следующая зада- а идентификации нестационарного объекта. Предположим, что систе- ма на интервале наблюдения $0 - T$ описывается дифференциальны- м уравнением вида

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{\psi=0}^{r_i} a_{i\psi}\varphi_{i\psi}(t)\Big)X^{(i)}(t)=\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{\psi=0}^{l_i} b_{i\psi}\mu_{i\psi}(t)\Big)Y^{(i)}(t) - Y(t); \quad (1)$$

здесь $Y(t)$ и $X(t)$ — соответственно входная и в- ходная координаты; $\varphi(t)$, $\mu(t)$ — известные функции, достаточно гла- дкие на отрезке $0 - T$. Необходимо по наблюдаемым входным и выход- ным координатам определить искомые параметры $a_{i\psi}$ ($i = 0 \div n$; $\psi = 0 \div r_i$), $b_{i\psi}$ ($i = 1 \div m$; $\psi = 0 \div l_i$). Умножим уравнение (1) на мод- улирующую функцию $k(\tau)$, предварительно записав его для времени $t - \tau$, и проинтегрируем в пределах от 0 до T. В результате получим

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{\psi=0}^{r_i} a_{i\psi}\int_0^T k(\tau)\,\varphi_{i\psi}(t-\tau)\,X^{(i)}(t-\tau)\,d\tau -$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{\psi=1}^{l_i} b_{i\psi}\int_0^T k(\tau)\,\mu_{i\psi}(t-\tau)\,Y^{(i)}(t-\tau)\,d\tau - \int_0^T k(\tau)\,Y(t-\tau)\,d\tau = 0. \tag{2}$$

Примем, что функция $k(\tau)$ обладает следующим свойством: $k^{(i)}(\tau)=0$ $(i=0\div n)$ при $\tau=0,T$ [3]. Например, к таким функциям относятся $\tau^c(\tau-T)^d f(\tau)$ $(c\geqslant n;\ d\geqslant n)$. Раскрывая в (2) интегралы по частям, найдем

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{\psi=0}^{r_i} a_{i\psi}(-1)^i\int_0^T [k(\tau)\,\varphi_{i\psi}(t-\tau)]^{(i)}\,X(t-\tau)\,d\tau -$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{\psi=0}^{l_i} b_{i\psi}(-1)^i\int_0^T [k(\tau)\,\mu_{i\psi}(t-\tau)]^{(i)}\,Y(t-\tau)\,d\tau -$$

$$-\int_0^T k(\tau)\,Y(t-\tau)\,d\tau = 0. \tag{3}$$

Предположим, что существуют единственные коэффициенты $a_{i\psi}$ $(i=0\div n;\ \psi=0\div r_i)$, $b_{i\psi}$ $(i=1\div m;\ \psi=0\div l_i)$, удовлетворяющие уравнению (3), т. е. при заданной структуре дифференциального уравнения (1), заданных $\varphi_{i\psi}(t)$ $(i=0\div n;\ \psi=0\div r_i)$, $\mu_{i\psi}(t)$ $(i=1\div m;$ $\psi=0\div l_i)$, $X(t)$, $Y(t)$ существуют единственные $a_{i\psi}$, $b_{i\psi}$, удовлетворяющие уравнению (1). Тогда величина

$$I=\int_0^T\Big\{\sum_{i=0}^{n}\sum_{\psi=0}^{r_i}(-1)^i a_{i\psi}\int_0^T[k(\tau)\,\varphi_{i\psi}(t-\tau)]^{(i)}\times$$

$$\times X(t-\tau)\,d\tau-\sum_{i=1}^{m}\sum_{\psi=0}^{l_i}(-1)^i b_{i\psi}\int_0^T[k(\tau)\,\mu_{i\psi}(t-\tau)]^{(i)}\times$$

$$\times Y(t-\tau)\,d\tau\int_0^T k(\tau)\,Y(t-\tau)\,d\tau\Big\}^2\,dt \tag{4}$$

в силу единственности коэффициентов $a_{i\psi}$ и $b_{i\psi}$, превращающих подынтегральное выражение (4) в тождественный нуль, и в силу того, что подынтегральная функция при всех t положительная, будет больше нуля или равна ему.

Найдем минимум величины I по параметрам. Тогда из (4) возможно записать следующую систему линейных относительно искомых параметров уравнений:

$$\int_0^T\Big\{\Big[\sum_{i=0}^{n}\sum_{\psi=0}^{r_i}(-1)^i a_{i\psi}\sum_{\beta=0}^{i}C_i^\beta(-1)^{i-\beta}\int_0^T k^{\beta}(\tau)\,\varphi_{i\psi}^{(i-\beta)}\times$$

$$\times(t-\tau)\,X(t-\tau)\,d\tau-\sum_{i=1}^{m}\sum_{\psi=0}^{l_i}(-1)^i\sum_{\beta=0}^{i}C_i^\beta(-1)^{i-\beta}\times$$

$$\times \int_0^T k^{(\beta)}(\tau)\, \mu_{i\psi}^{(i-\beta)}(t-\tau)\, Y(t-\tau)\, d\tau - \int_0^T k(\tau)\, Y(t-\tau)\, d\tau\Big] \times$$

$$\times (-1)^p \sum_{\gamma=0}^{p} C_p^\gamma (-1)^{p-\gamma} \int_0^T k_{(\lambda)}^{(\gamma)}\, \varphi_{p\nu}^{(p-\gamma)}(t-\lambda)\, X(t-\lambda)\, d\lambda\Big\} \times$$

$$\times\, dt = 0;\ p = 0 \div n;\ \nu = 0 \div r_p; \tag{5}$$

$$\int_0^T \Big\{\Big[\sum_{i=0}^{n} \sum_{\psi=0}^{r_i} (-1)^i a_{i\psi} \sum_{\beta=0}^{i} C_i^\beta (-1)^{i-\beta} \int_0^T k^{(\beta)}(\tau)\, \varphi_{i\psi}^{(i-\beta)}(t-\tau)\, X(t-\tau)\, d\tau -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \sum_{\psi=0}^{l_i} (-1)^i b_{i\psi} \sum_{\beta=0}^{i} C_i^\beta (-1)^{i-\beta} \int_0^T k^{(\beta)}(\tau)\, \mu_{i\psi}^{(i-\beta)}(t-\tau)\, Y(t-\tau)\, d\tau -$$

$$- \int_0^T k(\tau)\, Y(t-\tau)\, d\tau\Big] (-1)^p \sum_{\gamma=0}^{p} C_p^\gamma (-1)^{p-\gamma} \int_0^T k^{(\gamma)}(\lambda)\, \mu_{p\nu}^{(p-\gamma)}(t-\lambda) \times$$

$$\times\, Y(t-\lambda)\, d\lambda\Big\}\, dt = 0;\ p = 1 \div m;\ \nu = 0 \div l_p.$$

При получении уравнений (5) была использована формула Лейбница производной i-го порядка от произведения двух функций

$$[k(\tau)\, \varphi_{i\psi}(t-\tau)]^{(i)} = (-1)^{(i-\beta)} \sum_{\beta=0}^{i} C_i^\beta k^{(\beta)}(\tau)\, \varphi_{i\psi}^{(i-\beta)}(t-\tau). \tag{6}$$

Меняя порядок интегрирования в системе уравнений (5), получим:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{\psi=0}^{r_i} (-1)^i a_{i\psi} \sum_{\beta=0}^{i} \sum_{\gamma=0}^{p} C_i^\beta C_p^\gamma (-1)^{i+p-\beta-\gamma} \int_0^T k^{(\beta)}(\tau)\, d\tau \times$$

$$\times \int_0^T k^{(\gamma)}(\lambda)\, d\lambda \int_0^T \varphi_{i\psi}^{(i-\beta)}(t-\tau)\, \varphi_{p\nu}^{p-\gamma}(t-\lambda)\, X(t-\tau)\, X(t-\lambda)\, dt -$$

$$- \sum_{i=0}^{m} \sum_{\psi=0}^{l_i} (-1)^i b_{i\psi} \sum_{\beta=0}^{i} \sum_{\gamma=0}^{p} C_i^\beta C_p^\gamma (-1)^{i+p-\beta-\gamma} \int_0^T k^{(\beta)}(\tau)\, d\tau \times$$

$$\times \int_0^T k^{(\gamma)}(\lambda)\, d\lambda \int_0^T \mu_{i\psi}^{(i-\beta)}(t-\tau)\, \varphi_{p\nu}^{(p-\gamma)}(t-\lambda)\, Y(t-\tau)\, X(t-\lambda)\, dt =$$

$$= (-1)^p \sum_{\gamma=0}^{p} C_p^\gamma (-1)^{p-\gamma} \int_0^T k(\tau)\, d\tau \int_0^T k^{(\gamma)}(\lambda)\, d\lambda \int_0^T \varphi_{p\nu}^{(p-\gamma)}(t-\lambda) \times$$

$$\times\, Y(t-\tau)\, X(t-\lambda)\, dt;\ p = 0 \div n;\ \nu = 0 \div r_p.$$

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{\psi=0}^{r_i} (-1)^i a_{i\psi} \sum_{\beta=0}^{i} \sum_{\gamma=0}^{p} C_i^\beta C_p^\gamma (-1)^{i+p-\beta-\gamma} \int_0^T k^{(\gamma)}(\lambda)\, d\lambda \times$$

$$\times \int_0^T \varphi_{i\psi}^{(i-\beta)}(t-\tau)\, \mu_{p\nu}^{(p-\gamma)}(t-\lambda)\, Y(t-\lambda)\, dt - \sum_{i=1}^{m} \sum_{\psi=0}^{l_i} (-1)^i b_{i\psi} \times$$

$$\times \sum_{\beta=0}^{i}\sum_{\gamma=0}^{p} C_i^{\beta} C_p^{\gamma} (-1)^{i+p-\beta-\gamma}\int_0^T k^{(\beta)}(\tau)\,d\tau \int_0^T k^{(\gamma)}(\lambda)\,d\lambda \times$$

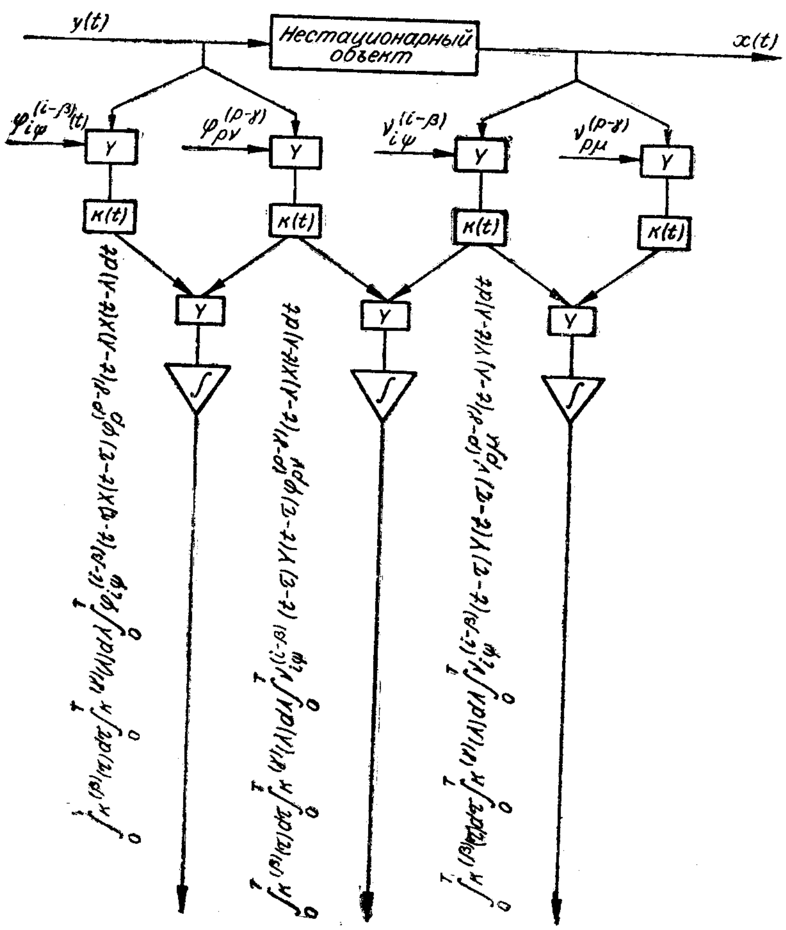
$$\times \int_0^T \mu_{i\varphi}^{(i-\beta)}(t-\tau)\,\mu_{p\nu}^{(p-\gamma)}(t-\lambda)\,Y(t-\tau)\,Y(t-\lambda)\,dt =$$

$$= (-1)^p \sum_{\gamma=0}^{p} C_p^{\gamma}(-1)^{p-\gamma}\int_0^T k(\tau)\,d\tau\int_0^T k^{(\gamma)}(\lambda)\,d\lambda\int_0^T \mu_{p\nu}^{(p-\gamma)}(t-\lambda)\times$$

$$\times Y(t-\tau)\,Y(t-\lambda)\,dt;\quad p=0\div n;\quad \nu=0\div l_p. \qquad (7)$$

В результате нами получена система линейных относительно искомых параметров уравнений, из которой легко находятся искомые параметры нестационарного объекта на интервале $0-T$. Точно таким же образом, перемещая начало координат в точку T на оси времени, можно найти коэффициенты уравнения в следующий интервал.

Выражения для производных от функции $k(\lambda)$, заданной аналитически, можно выразить тоже аналитически, и для их получения нет необходимости вводить в систему блоки дифференцирования. Для упрощения реализации устройства из аналитического выражения высшей производной путем генерирования ее можно получить с помощью блоков интегрирования все необходимые низшие производные.



Величины интегралов, входящих в (7), определяются в процессе наблюдения за входной и выходной координатами объекта. Как видно из системы (7), при определении величины интегралов нет необходимости в вычислении производных от входной и выходной координат. Метод может быть реализован как на элементах аналоговой техники, так и на цифровой машине.

На рисунке приведена структурная схема вычисления значений интегралов, входящих в уравнение (7). Рассмотрим подробно вычисление одного из интегралов, входящего в (7). Например:

$$\int_0^T k^{(\beta)}(\tau)\, d\tau \int_0^T k^{(\gamma)}(\lambda)\, d\lambda \int_0^T \mu_{i\psi}^{(i-\beta)}(t-\tau)\, Y(t-\tau)\, \varphi_{p\nu}^{(p-\gamma)}(t-\lambda)\, X(t-\lambda)\, dt. \tag{8}$$

Остальные интегралы вычисляются аналогично. Как известно [4], (8) представляет собой аналог взаимной дисперсии на интервале $0-T$ сигналов $\mu_{i\psi}^{(i-\beta)}(t)\, Y(t)$, пропущенных через фильтр с импульсной переходной функцией $k^{(\beta)}(t)$, и $\varphi_{p\nu}^{(p-\gamma)}(t) X(t)$, пропущенных через фильтр с импульсной переходной функцией $k^{(\gamma)}(t)$. Функции $k^{(\gamma)}(t)$, $k^{(\beta)}(t)$, $\mu_{i\psi}^{(i-\beta)}(t)$, $\varphi_{p\nu}^{(p-\gamma)}(t)$ известны, в то время как значения входной $y(t)$ и выходной $x(t)$ величин определяются в процессе наблюдения.

Пример. Предположим, что объект на интервале $0-T$ достаточно хорошо описывается дифференциальным уравнением

$$a_1 t x'(t) + a_0 x(t) = y(t). \tag{П1}$$

Необходимо в процессе наблюдения определить параметры a_1 и a_0.

В качестве модулирующей функции можно взять $\tau(\tau - T)$. И тогда уравнение (2) для нашего случая запишем так:

$$a_1 \int_0^T \tau(\tau - T)(t-\tau)\, x'(t-\tau)\, d\tau + a_0 \int_0^T \tau(\tau - T)\, x(t-\tau)\, dt = \int_0^T \tau(\tau - T)\, y(t-\tau)\, d\tau. \tag{П2}$$

Для того чтобы избавиться от производной входного сигнала, первый из интегралов (П2) раскроем по частям:

$$\int_0^T \tau(\tau - T)(t-\tau)\, x'(t-\tau)\, d\tau = -\tau(\tau - T)(t-\tau)\, x(t-\tau)\Big|_0^T + \int_0^T x(t-\tau)\, d\tau(\tau - T)(t-\tau) = \int_0^T [\tau(\tau - T)(t-\tau)]'\, x(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^T [-3\tau^2 + 2(T+t)\tau - \tau t]\, x(t-\tau)\, d\tau. \tag{П3}$$

Функционал (4) представим следующим образом:

$$I = \int_0^T \left\{ a_1 \int_0^T [\tau(\tau - T)(t-\tau)]'\, x(t-\tau)\, d\tau + a_0 \int_0^T \tau(\tau - T)\, x(t-\tau)\, d\tau - \int_0^T \tau(\tau - T)\, y(t-\tau)\, d\tau \right\}^2 dt. \tag{П4}$$

Определяя частные производные по искомым параметрам a_1 и a_0, получим систему линейных относительно искомых неизвестных уравнений:

$$a_1 \int_0^T \int_0^T [\tau(\tau - T)(t-\tau)]' x(t-\tau)\, d\tau \int_0^T [\sigma(\sigma - T)(t-\sigma)]' x(t-\sigma) \times$$

$$\times d\sigma\, dt + a_0 \int_0^T \int_0^T \tau(\tau - T)\, x(t-\tau)\, d\tau \int_0^T [\sigma(\sigma - T)(t-\sigma)]' x(t-\sigma)\, d\sigma \times$$

$$\times dt = \int_0^T \int_0^T \tau(\tau - T)\, y(t-\tau)\, d\tau \int_0^T [\sigma(\sigma - T)(t-\sigma)]' x(t-\sigma)\, d\sigma\, dt;$$

$$a_1 \int_0^T \int_0^T [\tau(\tau - T)(t-\tau)]' x(t-\tau)\, d\tau \int_0^T \sigma(\sigma - T)\, x(t-\sigma)\, d\sigma\, dt +$$

$$+ a_0 \int_0^T \int_0^T \tau(\tau - T)\, x(t-\tau)\, d\tau \int_0^T \sigma(\sigma - T)\, x(t-\sigma)\, d\sigma\, dt =$$

$$= \int_0^T \int_0^T \tau(\tau - T)\, y(t-\tau)\, d\tau \int_0^T \sigma(\sigma - T)\, x(t-\sigma)\, d\sigma\, dt. \qquad (\text{П}5)$$

Если принять $y(t) = \sin t$, $a_1 = a_0 = 1$, то $x(t) = t'(1 - \cos t)$. Величины интегралов, входящих в (П5), могут быть определены аналитически, но это довольно громоздко, поэтому пришлось прибегнуть к численному интегрированию. При $T = 2$ система (П5) примет вид:

$$0{,}15567\, a_1 + 0{,}1928\, a_0 = 0{,}34849;$$

$$0{,}19287\, a_1 + 0{,}2397\, a_0 = 0{,}43253, \qquad (\text{П}6)$$

откуда $a_1 \approx a_0 \approx 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Боднер. Теория автоматического управления полетом. М., «Наука», 1967.
2. Ю. П. Доброленский, В. И. Иванова, Г. С. Поспелов. Автоматика управляемых снарядов. М., «Оборонгиз», 1963.
3. I. Loeb, G. Gahen. Extraction, á partir des enregistrements de mésures, des paramétres dynamiqnes d'un systéme.— Automatisme, 1963, 8, № 12.
4. Н. А. Лившиц, В. Н. Пугачев. Вероятностный анализ систем автоматического управления, т. 1. М., «Советское радио», 1963.

Поступила в редакцию
22 сентября 1969 г.,
окончательный вариант —
19 декабря 1969 г.