А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 1 1970

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АВТОМЕТРИИ

УДК 621.317.088.24

В. И. РАБИНОВИЧ, С. А. ТИМОХИН

(Новосибирск)

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОПТИМАЛЬНЫХ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРИРУЮЩИХ СХЕМ В ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВАХ

В контрольно-измерительной технике широко используются устройства, осуществляющие интегрирование входного сигнала. Такая операция производится, например, в некоторых частотно-импульсных и время-импульсных преобразователях, в приборах для измерения слабых сигналов методом накопления, в устройствах измерения статистических характеристик случайных процессов. В работах [1—3] исследовались погрешности интегрирования, обусловленные неидеальностью интеграторов и воздействием случайных помех, а также указывались некоторые пути их снижения.

Одним из возможных путей уменьшения случайной погрешности является рациональный выбор структуры интегрирующего устройства и его параметров, т. е. выбор его импульсной переходной функции, обеспечивающей в определенном смысле наилучшую точность интегрирования. В статье приводится решение одной из задач синтеза оптимальных интегрирующих устройств. Сформулируем ее следующим образом. Пусть входной сигнал $x(t)$ представляет собой аддитивную смесь статистически независимых полезного сигнала $s(t)$ и помехи $\xi(t)$. Требуется определить такую импульсную переходную функцию $g(t, \tau)$ интегрального преобразователя, при которой среднеквадратическое значение разности между действительным выходным сигналом

$$y(t) = \int_0^t g(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau \qquad (1)$$

и желаемым выходным сигналом

$$l(t) = \int_0^t s(\tau)\, d\tau \qquad (2)$$

становится минимальным.

Рассмотрим случай, когда полезный сигнал $s(t)$ представляет собой случайную величину $s(t)=S$, второй начальный момент MS^2 которой равен C^2, а помеха $\xi(t)$ является случайным стационарным процессом с нулевым средним значением и дробно-рациональной спектральной плотностью вида

$$S_\xi(\omega) = \frac{P(\omega^2)}{Q(\omega^2)}.$$

Здесь $P(\omega^2) = \sum_{i=0}^{k} c_i \omega^{2i}$; $Q(\omega^2) = \sum_{i=0}^{q} d_i \omega^{2i}$, причем $q \geqslant k$.

Корреляционная функция такой помехи может быть представлена как

$$K_\xi(\tau_1 - \tau_2) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 e^{-a_i|\tau_1 - \tau_2|}. \tag{3}$$

Отметим, что функцией (3) может быть аппроксимирована с требуемой степенью точности любая корреляционная функция [4].

В качестве класса допустимых импульсных переходных функций $g(t, \tau)$ примем множество всех интегрируемых на интервале $[0, t]$ и равных нулю при $\tau<0$, $\tau>t$ функций.

Как известно (см., например, [4—7]), необходимое условие оптимальности весовой функции $g(t, \tau)$ заключается в том, что она должна удовлетворять интегральному уравнению

$$K_{lx}(t, \tau_1) = \int_0^t g(t, \tau_2) K_x(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2; \quad 0 \leqslant \tau_1 \leqslant t. \tag{4}$$

В этом выражении $K_{lx}(\tau_1, \tau_2) = M[l(\tau_1)x(\tau_2)]$ — взаимная корреляционная функция входного $x(t)$ и желаемого выходного $l(t)$ сигналов; $K_x(\tau_1, \tau_2) = M[x(\tau_1)x(\tau_2)]$ — корреляционная функция входного сигнала. Средняя квадратическая ошибка устройства с оптимальной весовой функцией $g(t, \tau)$ определяется соотношением

$$M\Delta^2 = M\{[y(t) - l(t)]^2\} = K_l(t, t) - \int_0^t g(t, \tau) K_{lx}(t, \tau)\, d\tau. \tag{5}$$

В рассматриваемом случае статистические характеристики $K_x(\tau_1, \tau_2)$, $K_{lx}(\tau_1, \tau_2)$, $K_l(\tau_1, \tau_2)$ имеют следующий вид:

$$K_x(\tau_1, \tau_2) = C^2 + K_\xi(\tau_1 - \tau_2); \quad K_{lx}(\tau_1, \tau_2) = C^2\tau_1; \quad K_l(\tau_1, \tau_2) = C^2\tau_1, \tau_2.$$

С учетом этого запишем интегральное уравнение (4) как

$$\int_0^t g(t, \tau_2) \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 e^{-a_i|\tau_1 - \tau_2|}\, d\tau_2 = f(t), \tag{6}$$

где

$$f(t) = C^2\left(t - \int_0^t g(t, \tau)\, d\tau\right). \tag{6a}$$

Для его решения применим дифференциальный оператор вида [7]

$$L_{\tau_1} = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{d\tau_1} + a_i\right)\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{d\tau_1} - a_i\right). \tag{7}$$

Очевидно, что применение оператора (7) к корреляционной функции помехи $K_\xi(\tau_1 - \tau_2)$ приводит к соотношению $L_{\tau_1} K_\xi(\tau_1 - \tau_2) = 0$ при $\tau_1 \neq \tau_2$. Поскольку при $\tau_1 = \tau_2$ производные второго и более высокого порядка функции (3) являются разрывными, то для произвольных τ_1 и τ_2 имеем

$$L_{\tau_1} K_\xi(\tau_1 - \tau_2) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \delta^{(2i)}(\tau_1 - \tau_2),$$

где $\delta^{(\nu)}(\tau) = \frac{d^\nu}{d\tau^\nu}\delta(\tau)$ — ν-я — производная дельта-функции. Постоянные α_i могут быть выражены через коэффициенты c_i числителя спектральной плотности помехи $P(\omega^2) = \sum_{i=1}^{k} c_i \omega^{2i}$ следующим образом:

$$\alpha_i = \begin{cases} c_i & \text{при четном } i; \\ -c_i & \text{при нечетном } i. \end{cases}$$

Применив к интегральному уравнению (6) оператор (7), получим

$$\int_0^t g(t, \tau_2) \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \delta^{(2i)}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 = h(t), \tag{8}$$

где $h(t) = L_{\tau_1} f(t) = (-1)^n f(t) \prod_{i=1}^{n} a_i^2$. При $0<\tau_1<t$ выражение (8) является линейным дифференциальным уравнением $2k$-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i g^{(2i)}(t, \tau_1) = h(t).$$

Здесь $g^{(\nu)}(t, \tau_1) = \frac{d^\nu}{d\tau_1^\nu} g(t, \tau_1)$ — ν-я производная $g(t, \tau_1)$. Общее решение этого уравнения $g_0(t, \tau)$ определяет искомую импульсную переходную функцию. Вследствие того, что функция $g(t, \tau)$ при $\tau = t$ и $\tau = 0$ в общем случае не является непрерывной, решение уравнения (6) содержит также дельта-функции и их производные. При этом порядок наивысшей производной дельта-функции не превышает $q - k - 1$ [4]. Таким образом, оптимальная весовая функция интегрирующего устройства может быть представлена

$$g(t, \tau) = g_0(t, \tau) + \sum_{i=0}^{q-k-1} \left[A_i(t)\, \delta^{(i)}(\tau) + B_i(t)\, \delta^{(i)}(\tau - t)\right]. \tag{9}$$

Из выражения (9) следует, что для определения оптимальной весовой функции $g(t, \tau)$ необходимо найти значения коэффициентов $f(t)$, $A_i(t)$, $B_i(t)$. Эти коэффициенты определяются из условия тождественного удовлетворения интегрального уравнения (6) и выражения (6а) при всех $0 \leqslant \tau \leqslant t$. Подставляем выражение для $g(t, \tau)$, определяемое равенством (9), в уравнение (6). В результате подстановки получим $2(q-k)+1$ линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов. Решая эту систему и подставляя результат в (9), найдем выражение для оптимальной импульсной переходной функции $g(t, \tau)$ интегрирующего устройства.

Пусть, например, корреляционная функция помехи $\xi(t)$ есть $K_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|}$ и, следовательно, $S_\xi(\omega) = \frac{2a\sigma^2}{\pi(a^2 + \omega^2)}$. В этом случае интегральное уравнение (6) принимает вид

$$\sigma^2 \int_0^t g(t, \tau_2)\, e^{-a|\tau_1 - \tau_2|}\, d\tau_2 = f(t), \tag{10}$$

где $f(t)$ определено формулой (6а). Оператор L_{τ_1} определяется выражением

$$L_{\tau_1} = \left(\frac{d}{d\tau_1} + a\right)\left(\frac{d}{d\tau_1} - a\right). \tag{10a}$$

В результате применения этого оператора к соотношению (10) находим

$$g_0(t, \tau) = \frac{af(t)}{2\sigma^2} = \frac{aC^2}{2\sigma^2}\left[t - \int\limits_0^t g(t, \tau)\, d\tau\right]. \tag{11}$$

Поскольку в рассматриваемом случае $q=k+1$, то выражение (9) для оптимальной весовой функции принимает вид

$$g(t,\tau) = g_0(t,\tau) + A(t)\delta(\tau) + B(t)\delta(\tau - t). \tag{12}$$

Подставив функцию (12) в интегральное уравнение (10) и приняв во внимание (11), получаем

$$\begin{aligned} &\frac{f(t)}{2}\left[2 - e^{-a\tau_1} - e^{-a(t-\tau_1)}\right] + \frac{1}{2}A(t)\sigma^2 e^{-a\tau_1} + \\ &+ \frac{1}{2}B(t)\sigma^2 e^{-a(t-\tau_1)} - C^2 t + \frac{C^2 a}{2\sigma^2} f(t)\, t + \\ &+ \frac{1}{2}A(t)\, C^2 + \frac{1}{2}B(t)\, C^2 = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Для тождественного выполнения равенства (13) при всех $0 \leqslant \tau_1 \leqslant t$ необходимо, чтобы коэффициенты при функциях $e^{-a\tau_1}$ и $e^{a\tau_1}$, а также сумма свободных членов равнялись нулю.

Приравнивая нулю указанные коэффициенты, находим уравнения для определения $f(t)$, $A(t)$, $B(t)$:

$$\begin{cases} f(t) - C^2 t + \dfrac{C^2 a}{2\sigma^2} f(t)\, t + \dfrac{1}{2}A(t)\, C^2 + \dfrac{1}{2}B(t)\, C^2 = 0; \\ -\dfrac{1}{2} f(t) + \dfrac{1}{2}A(t)\,\sigma^2 = 0; \\ -\dfrac{1}{2} f(t)\, e^{-at} + \dfrac{1}{2}B(t)\,\sigma^2 e^{-at} = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$f(t) = \frac{\sigma^2 t}{1 + \dfrac{\sigma^2}{C^2} + \dfrac{at}{2}}; \quad A(t) = B(t) = \frac{t}{1 + \dfrac{\sigma^2}{C^2} + \dfrac{at}{2}}.$$

Таким образом, искомая весовая функция $g(t, \tau)$ имеет вид

$$g(t, \tau) = \frac{t}{1 + \dfrac{\sigma^2}{C^2} + \dfrac{at}{2}}\left[\frac{a}{2} + \delta(\tau) + \delta(\tau - t)\right], \tag{14}$$

т. е. оптимальная импульсная переходная функция $g(t, \tau)$ интегрирующего устройства характеризует нестационарную систему, параметры которой являются функцией времени.

Характеристики системы в значительной степени определяются свойствами корреляционной функции помехи $\xi(t)$. Так, если время корреляции помехи $\tau_к = \frac{1}{a}$ стремится к нулю, то импульсная переходная функция $g(t, \tau)$ приближается к единичной, соответствующей идеальному интегратору. С другой стороны, если помеха за время интегрирования практически не меняется, т. е. можно считать, что $\tau_к = \infty$ и, следовательно, $a=0$, то

$$g(t, \tau) = \frac{t}{1 + \frac{\sigma^2}{C^2}} [\delta(\tau) + \delta(\tau - t)].$$

Импульсной переходной функции (14) соответствует структурная схема, изображенная на рис. 1. Здесь $k(t) = \frac{t}{1 + \frac{\sigma^2}{C^2} + \frac{at}{2}}$ — переменный коэффициент усиления усилителя.

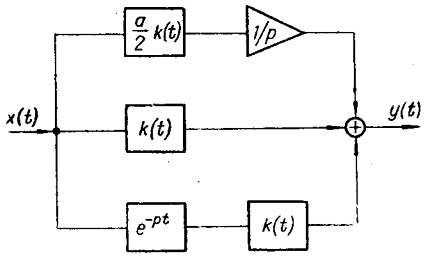

Рис. 1.

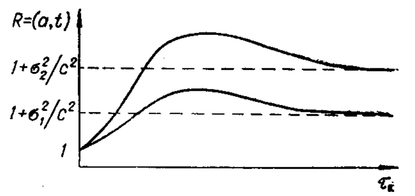

Рис. 2.

Из выражения (5) находим максимальную среднюю квадратическую ошибку для весовой функции (14)

$$M\,\Delta^2 = \frac{\sigma^2 t^2}{1 + \frac{\sigma^2}{C^2} + \frac{at}{2}}.$$

Представляется интересным оценить выигрыш в ошибке $M\Delta^2$, получаемый при использовании оптимального интегрирующего устройства (14), по сравнению с идеальным интегратором, имеющим единичную весовую функцию. В случае идеального интегратора

$$M\Delta_и^2 = M\{[y_и(t) - l(t)]^2\} = \frac{2\sigma^2}{a}\left[t - \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\right].$$

В этом выражении

$$y_и(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau.$$

Обозначим отношение средних квадратов $M\,\Delta_и^2$ и $M\,\Delta^2$ ошибки интегрирования через

$$R(a, t) = \frac{M\,\Delta_и^2}{M\,\Delta^2} = \left[1 + \frac{2}{at}\left(1 + \frac{\sigma^2}{C^2}\right)\right]\left[1 - \frac{1}{at}(1 - e^{-at})\right].$$

Отсюда следует, что при фиксированном t значение коэффициента $R(a, t)$ зависит от величины интервала корреляции $\tau_к = \frac{1}{a}$ помехи, а также от отношения $\frac{\sigma^2}{C^2}$. Можно показать, что $R(a, t) \geqslant 1$ независимо от значений параметров a, t, $\frac{\sigma^2}{C^2}$. Кроме того, при $\tau_к \to 0$ $(a \to \infty)$ $R(a, t) \to 1$, что согласуется с приведенным выше утверждением относительно приближения (при данном условии) импульсной переходной функции оптимального интегратора к единичной. С другой стороны, при $\tau_к \to \infty$ $(a \to 0)$ $R(a, t) \to 1 + \frac{\sigma^2}{C^2}$. На рис. 2 изображены кривые зависимости $R(a, t)$ от $\tau_к$ для двух значений $\frac{\sigma^2}{C^2}$.

Приведенная методика определения оптимальной весовой функции может быть также использована в случае, когда полезный сигнал является стационарным случайным процессом с дробно-рациональной спектральной плотностью.

Пусть, например, корреляционная функция сигнала $s(t)$

$$K_s(\tau_1 - \tau_2) = M[s(\tau_1)\, s(\tau_2)] = \sigma_s^2\, e^{-b|\tau_1 - \tau_2|},$$

а корреляционная функция помехи $\xi(t)$ равна $N\delta(\tau)$. В этом случае

$$K_x(\tau) = K_s(\tau) + K_\xi(\tau) = \sigma_s^2\, e^{-b|\tau|} + N\delta(\tau);$$

$$K_{lx}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\sigma_s^2}{b}\left[2 - e^{-b\tau_2} - e^{-b(\tau_1 - \tau_2)}\right].$$

Интегральное уравнение (4) принимает вид

$$\sigma_s^2 \int_0^t g(t, \tau_2)\, e^{-b|\tau_1 - \tau_2|}\, d\tau_2 = \frac{\sigma_s^2}{b} \times$$

$$\times \left[2 - e^{-b\tau_1} - e^{-b(t - \tau_1)}\right] - N g(t, \tau_1); \quad 0 \leqslant \tau_1 \leqslant t. \qquad (15)$$

Применив к уравнению (15) оператор (10а), приходим к дифференциальному уравнению второго порядка

$$g^{(2)}(t, \tau) - \gamma^2 g(t, \tau) + \mu = 0, \qquad (16)$$

где $\gamma^2 = b^2 + 2b\frac{\sigma_s^2}{N}$; $\mu = \frac{2b\sigma_s^2}{N}$. Поскольку в данном случае $q=k$, то полное решение интегрального уравнения (15) совпадает с общим решением уравнения (16). Таким образом, искомая импульсная переходная функция равна

$$g(t, \tau) = m_0 + m_1 e^{\gamma\tau} + m_2 e^{-\gamma\tau}. \qquad (17)$$

Подставив (17) в (15) и потребовав тождественного выполнения последнего для всех $0 \leqslant \tau \leqslant t$, получим значения коэффициентов m_0, m_1, m_2:

$$m_0 = \frac{\mu}{\gamma^2}; \quad m_1 = \left(1 - \frac{\mu}{\gamma^2}\right)\frac{b^2 - \gamma^2}{b}\,\frac{1}{(b + \gamma)e^{\gamma t} + (b - \gamma)};$$

$$m_2 = \left(1 - \frac{\mu}{\gamma^2}\right)\frac{b^2 - \gamma^2}{b}\,\frac{1}{(b + \gamma) + (b - \gamma)e^{-\gamma t}}.$$

Отсюда следует, что оптимальная система является нестационарной. Реализовать импульсную переходную функцию из-за наличия в ней членов $e^{\gamma t}$ и $e^{-\gamma t}$ затруднительно.

Для некоторых частных случаев выражение (17) значительно упрощается. Так, например, если выполняется неравенство $\gamma t \gg 1$, то $m_1 \simeq 0$, а $m_2 \simeq \frac{1-m_0}{b}(b-\gamma)$. Тогда можно записать приближенное выражение для оптимальной весовой функции в виде

$$g(\tau) \simeq m_0 + re^{-\gamma\tau}, \tag{18}$$

где $r = \frac{1-m_0}{b}(b-\gamma)$. Этой импульсной переходной функции соответствует система, образуемая параллельным соединением двух звеньев: интегратора с передаточной функцией, равной $K_1(p) = \frac{b}{p}$, и апериодического звена $K_2(p) = \frac{r\gamma}{p+\gamma}$.

Отметим, что при $b \to 0$ (сигнал $s(t)$ практически не изменяется в процессе интегрирования) весовая функция (17) приближается к единичной, что совпадает с ранее полученным результатом. Кроме того, можно заметить, что функция (17) приближается к единичной при стремлении к нулю интенсивности помехи N.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что в ряде случаев реализация оптимальных интегрирующих схем измерительных устройств затруднительна. Однако эти результаты позволяют указать потенциальные возможности интегрирующих схем, а также пути конструирования схем, близких к оптимальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Гаткин, В. А. Геранин, М. И. Карновский. Интеграторы в системах измерения. Киев, Гостехиздат УССР, 1963.
2. С. Ф. Малеханова, В. Е. Наконечный. Расчет погрешности интегрирующего цифрового вольтметра с двухкратным преобразованием.— Автометрия, 1967, № 2.
3. С. А. Тимохин, В. П. Шульц. Анализ случайной погрешности время-импульсных преобразователей интегрирующего типа.— В сб. «Методы и средства аналого-цифрового преобразования». Новосибирск, «Наука», 1969.
4. Дж. Х. Лэнинг, Р. Г. Бэттин. Случайные процессы в задачах автоматического управления. [б. г.], Изд-во иностр. лит., 1958.
5. В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1963.
6. Н. И. Андреев. Корреляционная теория статически оптимальных систем. М., «Наука», 1966.
7. И. Б. Челпанов. Оптимальная обработка сигналов в навигационных системах. М., «Наука», 1967.

Поступила в редакцию 2 июля 1969 г., окончательный вариант — 15 июля 1969 г.