А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я
№ 1 1970

УДК 62—506 : 621.391.172

И. В. СЕМУШИН

(Ленинград)

О ДИСКРЕТНЫХ ФИЛЬТРАХ АДАПТИВНОГО ТИПА, РАБОТАЮЩИХ ПО АКТИВНОМУ ПРИНЦИПУ

Введение. Применение классического метода Винера — Заде — Рагаззини в задачах выделения нестационарного сигнала при наличии шума приводит к трудно реализуемым нестационарным алгоритмам обработки [1]. В связи с этим представляется целесообразным построение и исследование упрощенных алгоритмов с адаптацией для выделения нестационарного сигнала при достаточно широких предположениях о его свойствах. При этом в отличие от известных [2] методов самонастройки по входному сигналу особый интерес представляют замкнутые системы адаптации, в которых самонастройка осуществляется в соответствии с активным принципом [3] по результатам наблюдений как входного, так и выходного сигнала. Как отмечается в [4], такие системы могут работать в условиях бо́льшей неопределенности, чем разомкнутые системы, однако их построение часто затруднено из-за отсутствия наблюдаемого критерия качества. Поэтому уместным представляется замечание [1] о том, что в ряде задач «хорошие результаты могли бы быть получены совместным применением теории обнаружения и теории линейного упреждения и фильтрации». На это же обстоятельство обращается внимание в [5].

В настоящей работе рассматривается именно такой «совместный» подход для решения задачи адаптивного выделения нестационарного сигнала при наличии шума. Целью работы является: 1) определение упрощенного оптимального алгоритма дискретной обработки для выделения нестационарного сигнала достаточно общего вида; 2) построение замкнутой схемы оптимизации; оценка эффективности оптимизатора и расчет порогового уровня решающего устройства (обнаружителя), минимизирующего максимальный условный риск; 3) определение условий, при которых возможна автоматическая оптимизация решающего правила, т. е. построение схемы адаптивного фильтра с двумя оптимизаторами.

Постановка задачи. Будем считать, что сигнал $s(t)$ можно представить в виде суммы структурно детерминированной непрерывной функции $f(t)$ и стационарного центрированного случайного процесса $m(t)$. Аддитивная помеха $n(t)$ принадлежит ансамблю реализаций нормального «белого» шума $n(t) \in N(0, \sigma_n)$. Допустим далее, что входные данные выбираются дискретно с постоянным интервалом длительности T, т. е. наблюдаются значения $x(kT)=s(kT)+n(kT)$, k — целое. Время выбора имеет конечную длительность, и за это время можно получить данные в $(r+1)$ точках.

Задача выделения состоит в получении несмещенной оценки $y(kT)$ текущего или будущего значений сигнала, $s(kT+LT), L \geqslant 0$ при заданном уровне подавления шума:

$$K_{\text{сгл}}(L) = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_n^2} \leqslant \beta. \qquad (1)$$

Здесь $K_{\text{сгл}}$ — коэффициент сглаживания шума, зависящий от длительности L интервала предсказания; σ_y^2 — дисперсия выходного сигнала $y(kT)$, определенная при $s(t)=0$; β — заданный уровень. В таком виде задача выделения встречается при автосопровождении в радиолокации, при цифровой обработке навигационных сигналов, при сглаживании результатов наблюдений и в ряде других случаев.

Задача построения адаптивного фильтра на основе активного принципа для решения указанной выше задачи выделения состоит в автоматическом обнаружении и устранении ошибки смещения путем дополнительной обработки реализаций входного и выходного сигналов и в обеспечении при этом заданного уровня подавления шума (1) путем соответствующего подбора и установки параметров алгоритма выделения.

Определение оптимального алгоритма выделения. Для решения поставленной задачи выделения, имея в виду получение упрощенного оптимального алгоритма, воспользуемся, с одной стороны, известной из анализа теоремой Вейерштрасса о возможности достаточно точной аппроксимации функции $f(t)$ степенным полиномом и, с другой стороны, аналогичным утверждением [6] относительно реализаций случайного процесса $m(t)$ и будем считать, что сигнал в интервале обработки достаточно точно аппроксимируется полиномом неизвестной степени p. Применим теперь в интервале выбора критерий оптимальности, отвечающий методу наименьших квадратов [7], аппроксимируя $s(t)$ полиномом степени s, и примем в соответствии с этим в качестве оценки сигнала величину [7]

$$y(kT) = \sum_{\nu=0}^{s} \frac{\sum\limits_{m=0}^{r} P_{\nu,r}(r-m)\, x(kT-mT)}{\sum\limits_{m=0}^{r} P_{\nu,r}^2(r-m)} P_{\nu,r}(r+L). \qquad (2)$$

Используя в (2) свойство нормированности [7] полиномов Чебышева $P_{\nu,r}(z)$, получим

$$y(kT) = \sum_{m=0}^{r} C_{s,r}(m, L)\, x(kT-mT), \qquad (3)$$

где весовые коэффициенты оптимального алгоритма вычисляются по формуле

$$C_{s,r}(m, L) = \sum_{\nu=0}^{s} \frac{(2\nu+1)\, r^{(\nu)}}{(r+\nu+1)^{(\nu+1)}} P_{\nu,r}(r-m)\, P_{\nu,r}(r+L). \qquad (4)$$

Здесь $r^{(\nu)}$ — факториальный многочлен. Формула (4) обобщает частные результаты, полученные в [8] для $s=1,2$. Далее рассмотрим случаи применения алгоритма (3) при $L=0$ и $L=1$. Путем формальных преобразований, связанных с вычислением сумм в (4), упрощаем формулы для весовых коэффициентов:

$$C_{s,r}(m,0)=\sum_{\nu=0}^{s}(-1)^{\nu}\frac{(2\nu+1)\,r^{(\nu)}}{(r+\nu+1)^{(\nu+1)}}P_{\nu,r}(r-m); \qquad (5)$$

$$C_{s,r}(m,1)=\frac{1}{r+1}\sum_{\nu=0}^{s}(-1)^{\nu}(2\nu+1)\,P_{\nu,r}(r-m). \qquad (6)$$

Коэффициенты сглаживания шума для этих алгоритмов получим в виде

$$K_{\text{сгл}}(0)=1-\frac{r^{(s+1)}}{(r+s+1)^{(s+1)}};\quad K_{\text{сгл}}(1)\,\frac{(r+s+2)^{(s+1)}}{(r+1)^{(s+1)}}-1.$$

Отсюда, учитывая очевидные соотношения

$$\frac{(r+s+1)^{(s+1)}}{r^{(s+1)}}<\left(\frac{r+1}{r-s}\right)^{s+1};\quad \frac{(r+s+2)^{(s+1)}}{(r+1)^{(s+1)}}<\left(\frac{r+2}{r-s-1}\right)^{s+1},$$

находим, что для удовлетворения (1) достаточно выбрать объем памяти r фильтра из условий:

$$r\geqslant\frac{s+(1-\beta)^{\frac{1}{s+1}}}{1-(1-\beta)^{\frac{1}{s+1}}};\quad L=0;\quad r\geqslant\frac{2+(s-1)(1+\beta)^{\frac{1}{s+1}}}{(1+\beta)^{\frac{1}{s+1}}-1};\quad L=1. \qquad (7)$$

Построение замкнутой схемы оптимизации. Для решения поставленной задачи построения адаптивного фильтра воспользуемся известным [7] свойством алгоритма (3): ошибка смещения $\bar{e}(kT)=s(kT)-A_{s,r}s(kT)$ равна нулю при $s\geqslant p$ и является полиномом степени $p-s-1$ при $s<p$. Здесь для удобства алгоритм (3) обозначен оператором $A_{s,r}$. Вводя ошибку $\mathring{e}(kT)=n(kT)-A_{s,r}n(kT)$, представим разностный процесс $e(kT)=x(kT)-y(kT)$ в виде

$$e(kT)=\bar{e}(kT)+\mathring{e}(kT). \qquad (8)$$

С целью предварительного сглаживания процесса $e(kT)$ воздействуем на него дискретным оператором текущего среднего [9] M_N, который в рекуррентной форме выглядит так:

$$\delta(kT)=M_N e(kT)=\delta(kT-T)+\frac{1}{N}[e(kT)-e(kT-NT)]. \qquad (9)$$

Учитывая представление (8), запишем $\delta(kT)$ в виде

$$\delta(kT)=\bar{\delta}(kT)+\mathring{\delta}(kT), \qquad (10)$$

где $\bar{\delta}(kT)=M_N\bar{e}(kT)$; $\mathring{\delta}(kT)=M_N\mathring{e}(kT)$. (Далее $\bar{\delta}$ будем называть сигналом, а $\mathring{\delta}$ — помехой.)

Теперь задачу обнаружения сигнала (ненулевой ошибки смещения) представим как процесс принятия решения γ относительно сигнала $\bar{\delta}(kT)$, если основываться на данных $\delta(kT)$ в соответствии с правилом решения $\alpha(\gamma/\delta)$ [5].

Задача состоит в определении решающего правила α, минимизирующего некоторую функцию оценки. Так как априорное распределение сигнала $\bar{\delta}(kT)$ неизвестно, то в соответствии с [5] в качестве функции оценки примем условный риск

$$r(\bar{\delta}, \alpha) = \int_{\Gamma} p(\gamma/\bar{\delta})\, C(\bar{\delta}, \gamma)\, d\gamma, \tag{11}$$

а в качестве критерия оптимизации — минимаксное правило выбора решений $\alpha^*_{\text{м}}$. Здесь $p(\gamma/\bar{\delta})$ — условная вероятность того, что устройство выдает решение γ, если сигнал равен $\bar{\delta}$ и принято правило выбора решений $\alpha(\gamma/\delta)$; $C(\bar{\delta}, \gamma)$ — функция стоимости, отвечающая каждой комбинации сигнала и решения; Γ — область возможных решений γ. Так как имеются два исхода: $\bar{e}=0$ и $\bar{e} \neq 0$, то возможны два соответствующих им решения: $\gamma=0$ и $\gamma=1$. Применяя пороговое обнаружение, запишем решающее правило в виде

$$\gamma = \begin{cases} 0, \text{ если } |\delta| < \alpha; \\ 1, \text{ если } |\delta| \geqslant \alpha, \end{cases}$$

а функцию стоимости определим следующим образом:

$$C(\bar{\delta}, \gamma) = \begin{cases} 1, \text{ если } (\bar{\delta} = 0 \,\&\, \gamma = 1) \vee (\bar{\delta} \neq 0 \,\&\, \gamma = 0); \\ 0, \text{ если } (\bar{\delta} = 0 \,\&\, \gamma = 0) \vee (\bar{\delta} \neq 0 \,\&\, \gamma = 1). \end{cases}$$

Здесь знаки & и $\vee$ обозначают логические операции конъюнкции и дизъюнкции. При таком определении решающего правила и функции стоимости условный риск (11) есть вероятность того, что ошибка смещения $\bar{\delta}=0$ и в то же время $|\delta| \geqslant \alpha$ («ложная тревога») плюс вероятность того, что ошибка смещения $\bar{\delta} \neq 0$ и в то же время $|\delta| < \alpha$ («пропуск»). Поэтому для вычисления условного риска как меры эффективности системы обнаружения ошибки смещения необходимо вычислить плотность вероятности распределения процесса (10). Для этого вычислим дисперсию центрированного процесса $\overset{\circ}{\delta}(kT)$. С учетом вида оператора осреднения (9) и оператора выделения (3) находим:

$$\overset{\circ}{\delta}(kT) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \overset{\circ}{e}(kT - iT) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{r+N-1} D_j\, n(kT - jT);$$

$$D_j = D_{j-1} + E_j - E_{j-N}; \quad D_{-1} = 0;$$

$$E_j = \begin{cases} 0; & j < 0,\ j > r; \\ C_{s,r}(0, L) - 1; & j = 0; \\ C_{s,r}(j, L); & j = 1, 2, \ldots, r. \end{cases}$$

Замечая, что в силу определения $C_{s,r}(m, L)$ по формуле (4)

$$\sum_{j=0}^{r+N-1} D_j^2 \leqslant N \sum_{j=0}^{r} E_j^2,$$

получим следующую верхнюю границу $\hat{\sigma}^2$ для искомой дисперсии σ^2 процесса $\overset{\circ}{\delta}(kT)$:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma_n^2}{N}\left(1 - 2C_{s,r}(0, L) + K_{\text{сгл}}(L)\right) \geqslant \sigma^2.$$

Далее, учитывая нормальность помехи $n(t)$, запишем закон распределения процесса $\delta(kT)$

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta-\bar{\delta}}{\sigma}\right)^2\right].$$

Тогда искомый условный риск (11) оказывается легко представимым через табулированную [10] функцию Лапласа $\Phi(x)$

$$r(\bar{\delta}, \alpha) = 1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{|\bar{\delta}|+\alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{|\bar{\delta}|-\alpha}{\sigma}\right)\right].$$

В этом выражении вместо σ удобно подставить его верхнюю границу $\hat{\sigma}$; при этом для условного риска получим также верхнюю границу

$$\hat{r}(\lambda, \eta)' = 1 - \Phi(\eta) + \frac{1}{2}\left[\Phi(\lambda+\eta) - \Phi(\lambda-\eta)\right] > r(\bar{\delta}, \alpha), \quad (12)$$

которую и будем использовать в качестве меры эффективности обнаружителя.

Здесь введены обозначения: $\lambda = |\bar{\delta}|/\hat{\sigma}$ — величина, характеризующая отношение сигнал/шум; $\eta = \alpha/\hat{\sigma}$ — величина, характеризующая отношение порогового уровня α к среднеквадратическому отклонению σ процесса $\delta(kT)$. Далее, в соответствии с минимаксным правилом решения, приравнивая нулю частную производную от (12) по α и учитывая, что

$$\frac{d}{dx}\Phi(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right),$$

получим следующее уравнение для определения оптимального значения α и его решение:

$$2\varphi(\eta) = \varphi(\lambda+\eta) + \varphi(\lambda-\eta); \quad \eta^* = \frac{1}{\lambda}\ln\left(e^{\frac{\lambda^2}{2}} + \sqrt{e^{\lambda^2}-1}\right). \quad (13)$$

Значение η^* минимизирует условный риск (12) при известном λ.

График функции (13) приведен на рис. 1, *а*, из которого видно, что по известным значениям λ и $\hat{\sigma}$ можно определить оптимальное значение α^* порогового уровня: $\alpha^* = \eta^*\hat{\sigma}$. Штриховая линия, уравнение которой $\eta_\infty = \frac{1}{2}\lambda$, является нижней асимптотой зависимости $\eta^*(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$. Так как априорное распределение λ неизвестно, то необходимо построить зависимость условного риска $\hat{r}(\lambda, \eta)$, отвечающую $\eta = \eta^*$. Эта зависимость $\hat{r}(\lambda, \eta^*)$ показана на рис. 1, *б*, из которого видно, что минимакс-

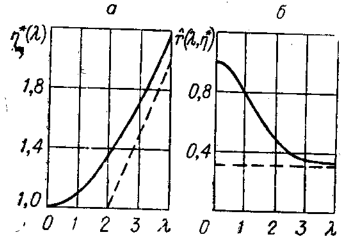

Рис. 1.

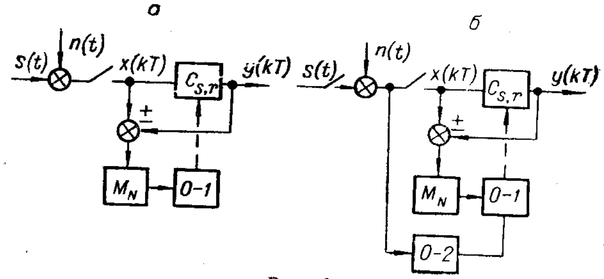

Рис. 2.

ная точка $\overset{*}{\alpha}_{м}$, определяемая при «наихудших» условиях, соответствует значению $\lambda=0$. Вычисляя $\overset{*}{\alpha}_{м}$, находим

$$\overset{*}{\alpha}_{м} = \lim_{\lambda \to 0} \alpha^* = \hat{\sigma}.$$

Таким образом, оптимальное значение $\overset{*}{\alpha}_{м}$ порогового уровня обнаружителя, отвечающее минимуму максимального условного риска, следует выбирать следующим образом:

$$\overset{*}{\alpha}_{м} = \sigma_{п} \sqrt{\frac{1}{N} (1 - 2 C_{s,r}(0, L) + K_{сгл}(L))} . \tag{14}$$

Отсюда становится ясным смысл введения оператора (9) текущего среднего: для неизменных уровня $\sigma_{п}$ шума и параметров s, r фильтра можно уменьшить величину порогового значения $\alpha_{м}$, увеличивая длительность N; при этом мера эффективности обнаружителя $r(0, \eta^*)$ не изменяется.

Соответствующая проведенному анализу замкнутая схема оптимизации устройства выделения (фильтра) приведена на рис. 2, *а*.

Алгоритм работы оптимизатора 0—1 показан на рис. 3 в виде блок-схемы, состоящей из «распознавателей» (овал) и «преобразователей» (прямоугольник). Здесь β [см. (1)] и H — заданные константы. Смысл введения H таков: если решение $|\delta(kT)| < \overset{*}{\alpha}_{м}$ принято H раз подряд, то нужно уменьшить степень s аппроксимирующего полинома фильтра, так как это позволит при прочих равных условиях упростить алгоритм выделения.

Вопрос о выборе величины H здесь специально не рассматривается и может быть исследован либо на основании дополнительных соображений, либо экспериментально. Значения r вычисляются по формулам (7), коэффициенты фильтра $C_{s,r}$ — по формулам (4)—(6) либо на каждом шаге, либо заранее и в этом последнем случае выбираются из памяти. Значение порога $\overset{*}{\alpha}_{м}$ также можно изменять, вычисляя его по (14). Если уровень $\sigma_{п}$ помех неизвестен, то можно принять $\sigma_{п}=\sigma_{п\,max}$. В худшем случае можно считать (при $L=0$) $\overset{*}{\alpha}_{м}=\frac{\sigma_{п\,max}}{\sqrt{N}}$, ибо $\sigma_{п\,max}$ обычно известно.

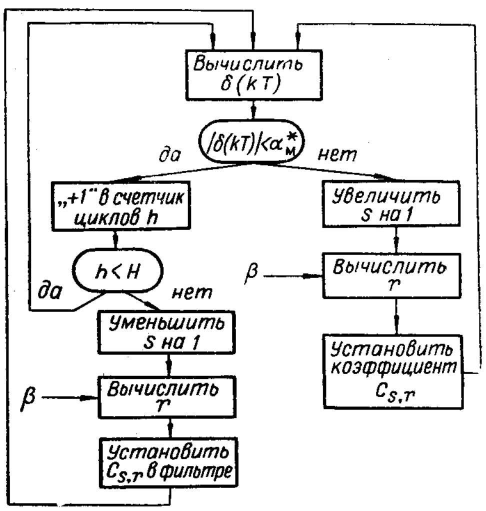

Рис. 3.

О построении адаптивного фильтра с двумя оптимизаторами. Для оптимизации решающего правила целесообразно, когда это возможно, измерять уровень $\sigma_{п}$ шума и вычислять оптимальное значение порога $\overset{*}{\alpha}_{м}$ по формуле (14). Такая возможность существует, например, при автосопровождении в радиолокации: в промежутках между обзорами сигнал $s(t)$ не поступает, и на вход устройства подается «чистый» шум, который можно обработать и вычислить его $\sigma_п$. Схема фильтра с двумя оптимизаторами показана на рис. 2, *б*, в которой оптимизатор 0—2 вычисляет оценку $\sigma_п$ и значение $\overset{*}{\alpha}_м$ по формуле (14).

К сказанному можно добавить следующее. С целью дальнейшего увеличения эффективности предлагаемого алгоритма обработки целесообразно изменить решающее правило так, чтобы решение принималось после сравнения с пороговым уровнем не одного, а группы соседних значений процесса $\delta(kT)$.

ВЫВОДЫ

В тех случаях, когда свойства входного сигнала рассматриваемой структуры заранее неизвестны и при дискретной фильтрации не предъявляется требования асимптотического улучшения качества сглаживания шума, целесообразно построение фильтров на основе реализации весовых функций обработки (4)—(6), а не использование рекуррентных фильтров [8].

Полученные в работе формулы (4)—(6) для оптимальных весовых коэффициентов определяют закон их переключения при осуществлении самонастройки, формулы (7) позволяют определять требуемый объем памяти r при каждом значении s степени аппроксимирующего полинома и заданном уровне β подавления шума.

Получены формулы для расчета минимаксного значения $\overset{*}{\alpha}_м$ порогового уровня α и построена замкнутая схема и алгоритм адаптации фильтра. Предложена схема самонастраивающегося фильтра с двумя оптимизаторами.

Целесообразность предлагаемого подхода к проектированию адаптивного фильтра подтверждается проведенным моделированием реальных устройств этого типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Бендат. Основы теории случайных шумов и ее применение. М., «Наука», 1965.
2. В. В. Солодовников, В. В. Семенов. Синтез и оценка точности фильтров, самонастраивающихся по входному сигналу.— В сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», вып. 9. М., «Машиностроение», 1968.
3. В. В. Солодовников. Некоторые вопросы теории и принципы построения аналитических самонастраивающихся систем.— В сб. «Аналитические самонастраивающиеся системы автоматического управления». М., «Машиностроение», 1965.
4. А. М. Бонч-Бруевич. Самонастраивающийся фильтр с двумя оптимизаторами.— В сб. «Самонастраивающиеся системы». Труды I Всесоюзной конференции по теории и практике самонастраивающихся систем. М., «Наука», 1965.
5. Д. Миддлтон. Введение в статистическую теорию связи, т. II. М., «Советское радио», 1962.
6. В. Н. Брандин. Об оптимальном приближении реализаций случайного процесса.— Автоматика и телемеханика, 1968, № 8.
7. Ш. Е. Микеладзе. Численные методы математического анализа. М., Гостехиздат, 1953.
8. N. A. Levine. A New Technique for Increasing the Flexibility of Recursive Least Squares Data Smoothing.— The Bell System Technical Journal, 1961, v. XL, № 3.
9. А. Ф. Романенко, Г. А. Сергеев. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. М., «Советское радио», 1968.
10. Н. А. Лифшиц, В. Н. Пугачев. Вероятностный анализ системы автоматического управления. М., «Советское радио», 1963.

Поступила в редакцию
3 декабря 1968 г.,
окончательный вариант —
6 мая 1969 г.