

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Чуйкин Олег Александрович

**КВАНТОВАЯ ОПТИКА ИСКУССТВЕННЫХ АТОМОВ
В ГИБРИДНЫХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ НАНОСТРУКТУРАХ**

Специальность: 1.3.6. – Оптика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Доктор физ.-мат. наук, доцент
Гринберг Яков Симхонович

Новосибирск, 2025

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Эффекты сверх- и суб-излучения для спонтанной эмиссии двух-кубитной системы	12
1.1. Введение	12
1.2. Общие свойства оператора перехода	15
1.3. Общее решение для много-кубитной системы	18
1.4. Спектры излучения и расчет корреляционных функций	24
1.5. Одно-кубитная система	26
1.5.1. Операторы перехода для одного кубита	27
1.5.2. Вероятности переходов для одного кубита	28
1.5.3. Спектры излучения одного кубита	29
1.6. Операторы перехода для двух-кубитной системы	30
1.7. Вероятности переходов для двух кубитов	33
1.8. Интерференционные эффекты для двух кубитов в волноводе	34
1.8.1. Начальное симметричное и асимметричное состояния	38
1.8.2. Начальное состояние с одним возбужденным кубитом	42
1.8.3. Начальное состояние с двумя возбужденными кубитами	46
1.8.4. Начальное состояние в форме суперпозиции	49
<i>а) Первый кубит в суперпозиции, второй в основном состоянии</i>	<i>49</i>
<i>б) Первый кубит в суперпозиции, второй в возбужденном состоянии</i>	<i>50</i>
<i>в) Оба кубита в состоянии суперпозиции</i>	<i>52</i>
1.9. Реконструкция запутанного состояния двух кубитов	54
1.10. Выводы к главе 1	57
Глава 2. Динамическая теория однофотонного транспорта через цепочку кубитов в одномерном волноводе	59
2.1. Введение	59
2.2. Краткое описание модели	61
2.3. Уравнения для кубитных и фотонных амплитуд	63
2.4. Одиночный кубит	66
2.5. Двух-кубитная система	73
2.5.1. Общие выражения для двух кубитов	73
2.5.2. Свойства коэффициента $G(kd)$	75

2.5.3. Фотонные амплитуды	77
2.6. Выводы к главе 2	85
Глава 3. Однофотонное вынужденное излучение для систем квантовой электродинамики на чипе	87
3.1. Введение	87
3.2. Описание системы	89
3.3. Подпространство с одним возбуждением	91
3.3.1. Решение в общем виде	92
3.3.2. Начальное поле в виде монохроматической волны	94
3.3.3. Начальное поле – гауссов импульс	99
3.4. Подпространство с двумя возбуждениями	103
3.4.1. Общее решение в случае рассеяния на возбужденном кубите	104
3.4.2. Падающая на возбужденный кубит монохроматической волна	108
3.4.3. Гауссов пакет, падающий на возбужденный кубит	111
3.4.4. Двух-фотонные амплитуды для падающего гауссова импульса	114
3.5. Выводы к главе 3	122
Заключение	124
Публикации автора по теме диссертации	126
Список литературы	128
Приложение А. Некоторые расчеты для динамической теории рассеяния	140
А1. Вывод выражения для коэффициента $G(kd)$	140
А2. Доказательство выражения (2.4.4)	142
Приложение Б. Вывод точных выражений для амплитуд при рассеянии поля на возбужденном кубите	143

Введение

Актуальность темы

В настоящее время широко развивающейся областью науки являются квантовые технологии [Dowling03, Georgescu12, Гайдаш23, Ezratty24], обычно разделяемые на такие области как квантовая криптография [Gisin02], квантовая коммуникация [Gisin07, Kimble08], и квантовые вычисления [Нильсен06, Гринберг06, Ladd10]. Последняя область представляет наибольший интерес, поскольку создание квантового компьютера связывают с огромным количеством возможных применений, от нахождения новых лекарств [Cao18] до решения проблем термоядерного синтеза [Каку24]. На текущий момент 2025 года уже существует ряд вполне удачных попыток реализовать квантовый процессор на разных технологических базах [Fedorov22], причем данными исследованиями занимаются уже не просто отдельные научные лаборатории, а крупные ИТ-корпорации, такие как Google, IBM и Intel. В частности, в 2019 году уже был пройден предел квантового превосходства [Arute19], т.е. с помощью квантового процессора была решена задача, для решения которой на классическом компьютере требуется неоправданно большое количество времени, а в 2023 году впервые был представлен процессор, содержащий более чем 1000 кубитов (про понятие кубита см. ниже) [Castelvechi23]. Тем не менее, текущие квантовые процессоры пока не являются полноценными квантовыми компьютерами в широком смысле этого слова, поскольку все еще не обладают достаточной вычислительной мощностью и имеют высокие уровни шумов [Preskill18]. Тем не менее, учитывая колоссальный прогресс в данной области за последние 25 лет, можно рассчитывать, что в относительно близком будущем ученые смогут создать полноценный квантовый компьютер. В этом ключе понимание и изучение основополагающей физической базы, на которой строится работа квантовых технологий, имеет огромное прикладное и фундаментальное значение.

В центре идеи квантовых технологий лежит квантовый бит, или кубит (qubit) – квантовый аналог классических битов из теории информации. Бит – это бинарная физическая система, которая может находиться в двух дискретных состояниях, обычно обозначаемых 0 и 1. В случае кубита эти состояния становятся квантовыми, а значит для них будут выполняться два главных квантово-механических свойства: а) принцип суперпозиции состояний, т.е. кубит может находиться в промежуточном состоянии между 0 и 1 одновременно; б) явление запутанности, которое связывает разные кубиты между собой и позволяет им взаимодействовать даже на больших расстояниях. Эти два свойства как раз и позволяют использовать набор кубитов для эффективной обработки и передачи информации [Нильсен06].

В современных классических процессорах, как известно, роль битов играют транзисторы, а любые другие физические реализации практически не используются. Это связано с общей стандартизацией и распространением полупроводниковой электроники, в частности основанной на кремнии, и удобством в ее производстве и эксплуатации. Сказать то же самое о физической реализации квантовых битов, пока, к сожалению, нельзя. На текущий момент кубиты реализуются на основе множества физических систем, и все они имеют свои преимущества и недостатки [Buluta11]. Обычно выделяют следующие основные типы кубитов: 1) холодные нейтральные атомы [Henriet20]; 2) ионы в ловушках [Leibfried03, Bruzewicz19]; 3) фотоны, или оптические кубиты [Knill01, Rudolph17]; 4) вакантные центры окраски в кристаллах [Kane98, Dutt07, Chatterjee21]; 5) полупроводниковые квантовые точки [Loss98, Chatterjee21]; 6) сверхпроводящие кубиты [Clarke08, Wendin17]; Последние три группы часто объединяют под общим понятием искусственных атомов, или твердотельных кубитов. Изучению такого типа кубитов (в первую очередь сверхпроводящих) и их применению для задач квантовой оптики и посвящена данная диссертация.

Одной из самых перспективных и широко используемых физических реализаций кубитов и сопутствующих элементов квантовых технологий является так называемая область квантовой электродинамики на чипе (circuit QED) [Blais04, Ильичев18, Blais21]. В этом случае кубиты реализуются на основе сверхпроводящих электронных элементов, и поэтому называются сверхпроводниковыми кубитами [Clarke08, Ильичев13]. Физический принцип работы таких кубитов основан на эффекте Джозефсона – туннелировании электронов через тонкий слой изолятора между двумя сверхпроводниками [Тинкхам80, Ильичев18]. Контакты такого рода, называемые контактами Джозефсона, и составляют основу сверхпроводниковых кубитов, которые в зависимости от конфигурации элементов бывают разных типов [Krantz19, Kjaergaard20].

Для повышения степени взаимодействия твердотельных кубитов с посылаемыми на них сигналами, подобные структуры размещают в одномерных геометриях гибридных наноструктур, выполняемых обычно на том же чипе [Blais21, Schoelkopf08]. Фактически они представляют собой одномерные резонаторы или волноводы, в которых излучение распространяется вдоль одного заданного направления. В случае сверхпроводящих кубитов такие элементы представляют собой микроволновые копланарные линии [Gorpl08], в случае квантовых точек – нанофотонные кристаллы [Martin24].

Область circuit QED имеет ряд существенных преимуществ по сравнению с другими реализациями квантовых систем. Во-первых, сверхпроводящие кубиты имеют полностью рукотворную природу, в связи с чем их (вместе с квантовыми точками) называют искусственными атомами. Это позволяет создавать системы с необходимыми параметрами, а не

пытаться подобрать их из существующих материалов окружающей природы. Во-вторых, из-за своих размеров (порядка единиц и десятков мкм), величина взаимодействия излучения с кубитами значительно выше, чем, например, для холодных атомов. Это позволяет достигать так называемого режима сильной связи (strong coupling). В-третьих, из-за своих больших размеров и технологической природы, управление и оперирование сверхпроводящими кубитными системами является более гибким и эффективным по сравнению с другими системами – каждый кубит может измеряться и управляться индивидуально от остальных. В-четвертых, в зависимости от разных типов сверхпроводящих кубитов, существует возможность подстройки их параметров уже после фабрикации – например, изменение резонансной частоты с помощью магнитного поля. И наконец, в-пятых, сверхпроводящие кубиты чисто с технологической точки зрения имеют преимущество как наиболее пригодные к производству и масштабированию в промышленных реалиях. Они во многом схожи с существующими компьютерными технологиями, также выполняемыми на микроэлектронной основе.

Искусственные атомы, т.е. сверхпроводниковые или полупроводниковые кубиты, интересны не только как основной элемент квантового процессора. Из-за своей рукотворной природы, их можно считать технологически произведенными двух-уровневыми системами со своим набором параметров, которые возможно настраивать либо задачей конкретных условий при производстве чипов, либо с помощью внешних воздействий, например магнитными полями или электрическим током. Такой подход позволяет использовать их как крайне удобную и гибко настраиваемую площадку для изучения квантовых свойств взаимодействия излучения с веществом. Другими словами, подобные структуры можно применять для изучения задач квантовой оптики на уровне отдельных атомов и фотонов [You11].

В настоящее время квантовая оптика на основе искусственных атомов является активно развивающейся областью науки [Астафьев23, Gu17, Hoil3] и имеет множество приложений, начиная от фундаментальных основ квантовой физики и заканчивая применением в областях микроволновой фотоники [Gu17], квантовой теории передачи информации [Casariego23], и, разумеется, квантовых вычислений (про которые шла речь выше). Широкий спектр различных квантово-оптических экспериментов уже был выполнен на основе сверхпроводящих кубитов в наноструктурах: наблюдение резонансной флуоресценции на одиночном кубите в копланарном волноводе [Astafiev10], наблюдение триплета Моллоу и расщепления Аутлера-Таунса [Baur09, Sillanpaa09], эффект сверхизлучения Дикке для двух кубитов [Mlynek14, vanLoo13], электромагнитно-индуцированная прозрачность [Novikov16, Liu16, Abdumalikov10], лазерная генерация на одиночном искусственном атоме [Astafiev07], и еще множество других экспериментов (более подробный разбор см. в работе [Gu17]).

Однако стоит отметить, что квантовая оптика на основе сверхпроводящих кубитов в одномерных наноструктурах имеет ряд серьезных отличий от более привычной квантовой оптики естественных атомов и молекул (см. таблицу 1). Основное отличие связано с разницей диапазонов излучений – в случае атомов это оптическая область, обычно характеризующаяся фотонами с длиной волны 400-800 нм и энергиями порядка эВ. Резонансные частоты сверхпроводящих кубитов же лежат в пределах 1-10 ГГц, и значит взаимодействующие с ними фотоны находятся в микроволновом диапазоне спектра, и для них характерны длины волн в несколько сантиметров и малые энергии одиночных фотонов порядка 10^{-5} эВ. Однако, за счет своих больших размеров и одномерного распространения излучения, искусственные атомы характеризуются намного более высокой степенью взаимодействия с электромагнитными полями, на несколько порядков превышающую аналогичное взаимодействие для атомов в свободном пространстве (см. последнюю строчку в таблице 1).

Параметр	Атомы в свободном пространстве	Искусственные атомы в одномерных геометриях
Частота, Ω	100-10 ⁴ ТГц	1-10 ГГц
Длина волны, λ	400-800 нм	0.1-10 см
Энергия одного фотона, E	1-5 эВ	1-5·10 ⁻⁵ эВ
Отношение силы связи к резонансной частоте, g/Ω	$\sim 10^{-7}$	~ 0.01
Дипольный момент, d	$\sim 10^{-27}$ Кл·м	$\sim 10^{-23}$ Кл·м

Таблица 1. Сравнение параметров для атомов в свободном пространстве с сверхпроводящими кубитами в одномерных наноструктурах.

В данной диссертации представлено теоретическое исследование динамики твердотельных кубитов в одномерной геометрии открытого волновода. В отличие от хорошо известных копланарных резонаторов, одномерные микроволновые волноводы и их влияние на кубиты все еще не до конца изучены с фундаментальной точки зрения, и представляют определенный интерес [Roy17, Gu17, Sheremet23]. Здесь мы постарались решить ряд задач, имеющих важное теоретическое и прикладное значение, а именно: а) спонтанный распад системы из двух кубитов в волноводе, и формирование сверх- и суб-излучательных состояний; б) динамика рассеяния однофотонного гауссова импульса на кубитной цепочке; в) рассеяние полей на возбужденном кубите в волноводе, или задача стимулированного излучения;

Наш подход к расчетам выполнен в рамках общей квантовой оптики, и вообще говоря, не конкретизирует физические реализации кубитов и их внутреннюю структуру. Тем не менее, весь

численный анализ и графическое отображение полученных результатов сделаны для конкретных параметров, которые соответствуют типичным значениям для сверхпроводниковых кубитов. Однако, общие алгоритмы решения можно использовать и для описания других одномерных физических систем, имеющих схожие характеристики.

Целью работы является теоретическое исследование фотонного транспорта и динамики искусственных атомов, помещенных в одномерную геометрию наноструктур; разработка теоретических методов для описания задач спонтанного излучения и рассеяния фотонных полей на кубитных структурах; аналитическое и численное исследование решений данных задач и выявление новых физических эффектов и закономерностей.

В области волноводной квантовой электродинамики имеется ряд нерешенных **задач**, рассмотрение которых имеет важное фундаментальное и прикладное значение для области квантовой оптики, и соответствует цели работы:

1. Теоретическое описание процесса спонтанного излучения для много-кубитных систем, размещенных в одномерных открытых волноводах, и изучение возникающих в таких системах интерференционных эффектов.
2. Решение задачи рассеяния фотонного импульса на кубитной цепочке, не ограниченное приближением больших расстояний между элементами.
3. Построение методики определения состояния кубита в открытом волноводе с помощью анализа рассеянного на кубите излучения.
4. Теоретическое описание процесса однофотонного вынужденного излучения, возникающего при рассеянии фотона на возбужденном кубите.

Научная новизна:

1. Найдены аналитические выражения для спектров спонтанного излучения и для скоростей распада системы из двух кубитов, помещенных в одномерный открытый волновод. Данные выражения носят максимально общий характер, и могут описывать любую начальную конфигурацию двух-кубитного состояния, если в начальный момент времени в волноводе нет фотонов.
2. Предложена оригинальная методика реконструкции произвольного запутанного состояния двух-кубитной системы с помощью измерения ряда спектральных характеристик и параметров кубитной системы.
3. Получено общее решение нестационарной задачи рассеяния однофотонного импульса на кубитной цепочке с использованием только физической (положительной) оси частот, что позволяет анализировать случаи для более коротких расстояний как между кубитами, так и

между начальным положением фотонного импульса и кубитной цепочки. Найден ряд серьезных отличий между полученным результатом и ранее известными моделями рассеяния.

4. Решена задача о рассеянии однофотонного импульса на возбужденном кубите. Показаны отличия такого рассеяния от рассеяния на кубите в основном состоянии, что может использоваться для построения методики определения состояния кубита в открытом волноводе. Продемонстрированы явные признаки эффекта индуцированного излучения и пространственной группировки фотонов при достаточной близости падающего импульса к возбужденному кубиту.

Теоретическое и практическое значение:

1. Результаты выполненного исследования могут использоваться при анализе спонтанного излучения для цепочки кубитов в одномерном волноводе, и изучения появляющихся в таких системах эффектов сверх- и суб-излучения, что имеет важное значение в области микроволновой фотоники.

2. На основе полученных формул для спектров системы двух кубитов разработана методика реконструирования запутанного состояния, позволяющая определить его амплитуды вероятности и фазу, что важно для области квантовых вычислений.

3. Оригинальные научные результаты, полученные в ходе анализа рассеяния однофотонного импульса на кубитной цепочке могут быть использованы для решения задач фотонного транспорта в твердотельных наноструктурах, и в перспективе применяться для задач передачи квантовой информации и при проектировании квантовых технологий.

4. Описанный в работе эффект индуцированного излучения может использоваться для описания и проектирования различных микроволновых фотонных устройств, а также применяться для задач квантовой коммуникации и квантовой теории информации.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Характер спонтанного излучения в двух-кубитной системе в значительной мере зависит от расстояния, на котором расположены кубиты, и может проявлять как ускоренный (сверх-излучение), так и замедленный (суб-излучение) распад в сравнении с распадом одиночного кубита.

2. Реконструкция чистого запутанного состояния системы из двух кубитов в копланарном волноводе возможна с помощью ряда спектральных измерений. Для нахождения амплитуд вероятности достаточно знать скорость распада кубитной системы и значение спектра на резонансной частоте. Для нахождения фазы запутанного состояния, дополнительно к этому нужно знать эффективное меж-кубитное расстояние и значение спектра, смещенного от резонанса на небольшую величину.

3. Нестационарная задача рассеяния гауссова импульса на кубитной цепочке значительно модифицируется при учете только положительной области частот. Во-первых, для фотонных спектров появляется дополнительная добавка к частотному сдвигу, напрямую зависящая от меж-кубитного расстояния. Во-вторых, спектры прошедшего и отраженного сигналов начинают существенно зависеть от начального положения падающего импульса, если первоначально импульс находится вблизи кубита, т.е. на расстоянии, сопоставимом с его шириной в пространстве.

4. Вероятность прохождения падающего на кубит фотонного импульса значительно зависит от состояния кубита, что можно использовать для определения состояния кубита в открытом волноводе.

5. Однофотонный импульс, падающий на возбужденный кубит с достаточно близкого расстояния, вызывает эффект стимулированного излучения. Помимо одинакового направления распространения, также высока вероятность локализации двух фотонов в пространстве – эффект группировки фотонов.

Апробация работы. Изложенные в диссертации результаты обсуждались и докладывались на семинарах НГТУ и на 7 конференциях и симпозиумах:

- XXV международный симпозиум “Нанопфизика и Нанопэлектроника” (Нижний Новгород, 9–12 марта 2021);

- 15-ая всероссийская научная конференция с международным участием “Физика ультрахолодных атомов – 2021” (Новосибирск, 20-22 декабря 2021);

- XXVI международный симпозиум “Нанопфизика и Нанопэлектроника” (Нижний Новгород, 14–17 марта 2022 г.);

- XXVII международный симпозиум “Нанопфизика и Нанопэлектроника” (Нижний Новгород, 13–16 марта 2023);

- 17-ая всероссийская научная конференция с международным участием “Физика ультрахолодных атомов – 2023” (Новосибирск, 18-20 декабря 2023);

- XXVIII международный симпозиум “Нанопфизика и Нанопэлектроника” (Нижний Новгород, 11–15 марта 2024);

- 18-ая всероссийская научная конференция с международным участием “Физика ультрахолодных атомов – 2024” (Новосибирск, 16-18 декабря 2024);

- XXIX международный симпозиум “Нанопфизика и Нанопэлектроника” (Нижний Новгород, 10–14 марта 2025);

Степень достоверности результатов проведенных исследований. Полученные аналитическими и численными методами результаты согласуются друг с другом и не противоречат базовым физическим принципам и известным из литературы данным. Правильность выводов и согласованность полученных результатов неоднократно подтверждались при апробации работы.

Личный вклад. Автором внесен определяющий вклад в получение основных результатов диссертационной работы: он принимал активное участие в постановке задач, проводил аналитические расчеты и численное моделирование, принимал активное участие в обсуждении полученных результатов и в подготовке работ к печати.

Результаты, составившие содержание диссертации, использовались при выполнении работ по грантам, где соискатель выступал в роли исполнителя: проект Министерства науки и высшего образования РФ FSUN-2020-0004 и FSUN-2023-006, а также грант фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 13 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 9 – в тезисах докладов конференций.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, и двух приложений. Полный объем диссертации составляет 144 страницы и включает 33 рисунка и 1 таблицу. Список литературы содержит 139 наименований.

Глава 1. Эффекты сверх- и суб-излучения для спонтанной эмиссии двух-кубитной системы

1.1 Введение

Эффект спонтанного излучения возникает при взаимодействии возбужденных атомов с континуумом мод окружающей среды. Искусственные атомы, или твердотельные кубиты, помещенные в одномерные наноструктуры, также подвержены спонтанной эмиссии, которая является одним из основных источников декогеренции, т.е. потери квантовых свойств у состояний [Schlosshauer07]. Изучение процесса спонтанного излучения в этом смысле носит важный практический аспект, поскольку оно рассматривается как одно из основных препятствий для практической реализации квантовых алгоритмов вычисления и передачи квантовой информации [Devoret13].

В ранних исследованиях спонтанного излучения многоатомные и двухатомные системы рассматривались в свободном пространстве [Lehmberg70a, Lehmberg70b, Ficek90, Rudolph95, Ficek02, Lenz93]. В этом случае взаимодействие атомов с вакуумными модами приводит к короткодействующему диполь-дипольному взаимодействию между ними [Lehmberg70a]. Спонтанное излучение возбужденного атома в свободном пространстве является результатом его взаимодействия с непрерывным континуумом фотонных мод вакуума [Скалли03]. В случае многоатомных систем наблюдаются некоторые коллективные эффекты. Например, облако из N идентичных атомов, локализованных в пространстве на малых расстояниях $d \sim \lambda$, распадается со скоростью затухания $N\Gamma$, где Γ – это скорость распада отдельного атома [Dicke54]. Следовательно, система из N возбужденных атомов распадается в N раз быстрее, чем отдельный атом. Такое свойство многоатомной системы было названо сверхизлучением [Gross82, Cong16].

Однако поведение атомов в ограниченной геометрии сильно отличается от поведения в свободном пространстве. Например, скорость спонтанного распада атома, заключенного в резонаторе, может существенно отличаться от скорости его распада в свободном пространстве (так называемый эффект Парселла) [Purcell46]. Обмен виртуальными фотонами между одинаковыми атомами, расположенными на равном расстоянии друг от друга в одномерном волноводе, приводит к межатомному взаимодействию, сила которого периодически зависит от соотношения d/λ , где d – расстояние между соседними атомами, а λ – это длина волны основной моды. Более того, такая система демонстрирует коллективные возбуждения со значительными изменениями времени жизни в сравнении с одиночным атомом [Lalumiere13, Mirhosseini19, Greenberg21b, Brehm21].

Многие из этих эффектов были экспериментально реализованы в рамках квантовой электродинамики на чипе (circuit QED) со сверхпроводящими кубитами в качестве искусственных атомов, помещенных в одномерные резонаторы [Blais21], либо в одномерные открытые волноводы [Sheremet23]. Так, например, различное пространственное расположение кубитов в цепочке может привести к значительному изменению скоростей распада [Lalumiere13, vanLoo13]. Такие коллективные эффекты могут привести как к увеличению скорости распада, т.е. к сверхизлучению [Delanty11, Lambert16], так и к снижению скорости распада, т.е. к субизлучению [Albrecht19, Zhang19].

Система, состоящая из двух взаимодействующих атомов в открытом копланарном волноводе, является простейшей системой, которая проявляет интерференционные эффекты. Такая система достаточно широко изучалась теоретически, как для естественных атомов в оптической области [Макаров03, Ordonez04, Kien05], так и для искусственных твердотельных атомов в микроволновом диапазоне [Lalumiere13, Hu23].

В данной главе рассмотрена система, состоящая из двух искусственных атомов (сверхпроводящих кубитов) в одномерном открытом волноводе (рисунок 1.1). В отличие от предыдущих исследований, нами получено общее аналитическое выражение, которое позволяет рассчитывать спектры фотонного излучения и скорости распада (скорость потери энергии в кубитной системе) для различных исходных конфигураций из двух кубитов с одним или двумя возбуждениями и для различных межкубитных расстояний d .

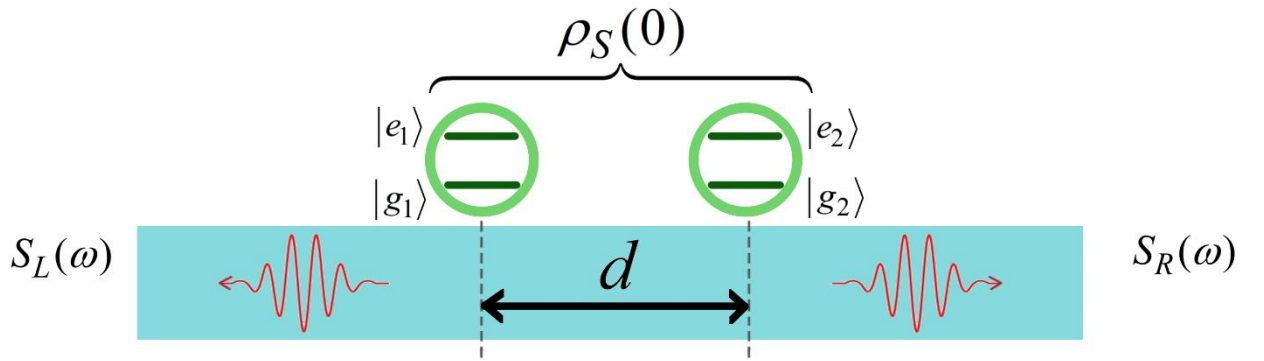


Рис. 1.1. Система, подробно рассматриваемая в данной главе – два кубита, расположенные на расстоянии d друг от друга, и помещенные в одномерный открытый волновод. Начальное состояние кубитной системы описывается произвольной матрицей плотности $\rho_S(0)$. Спектр спонтанного излучения кубитной системы на правом конце волновода – $S_R(\omega)$, и на левом – $S_L(\omega)$.

Существуют два основных подхода к вычислениям данного типа. Наиболее распространенный метод основан на уравнении Линдблада для приведенной матрицы плотности [Lalumiere13]. Второй подход использует уравнение движения Гейзенберга для произвольного

системного оператора [Lehmberg70a, Lehmberg70b]. Два подхода, по сути, эквивалентны. Выбор в пользу любого из этих методов зависит от конкретной задачи.

В нашем расчете был выбран второй метод, и в качестве системного оператора взят так называемый оператор перехода, впервые введенный Лембергом [Lehmberg69] для теоретического описания спонтанного излучения двухуровневых атомов в свободном пространстве [Lehmberg70a, Lehmberg70b]. С помощью него мы рассмотрели динамику и спектральные характеристики процесса спонтанного излучения для цепочки искусственных атомов в одномерном открытом волноводе.

Поскольку в центре нашего расчета лежит оператор перехода, данный метод мы будем именовать именно так. В отличие от более привычных моделей, метод оператора перехода обладает рядом серьезных преимуществ: а) в сравнении с классическим расчетом через матрицу плотности данный метод более прост и вместе с тем более точен, в частности он не требует вводить ограничение на второй порядок связи системы с резервуаром; б) для многоатомной системы уравнения для оператора перехода получаются линейными, в отличие от аналогичных уравнений для спиновых операторов; в) решения данных уравнений есть операторные функции, которые не зависят от конкретного начального условия – таким образом, достаточно решить задачу в общем виде один раз, и только потом выбирать интересующие нас начальные состояния системы; г) метод позволяет находить корреляционные функции без использования приближения в виде флуктуационно-регрессионной теоремы – как будет показано далее, это позволяет находить спектры излучения для спонтанной эмиссии в цепочке кубитов; Тем не менее, использование оператора перехода также имеет ограничения, в первую очередь связанные с размером системы – при анализе большого числа атомов $N > 2$ система уравнений быстро становится чрезмерно большой, и если в случае матрицы плотности эта система состоит из дифференциальных уравнений, то в случае оператора перехода мы имеем систему операторных уравнений, что усложняет ее численное решение.

Глава организована следующим образом. В разделе 1.2 мы определяем оператор перехода, описываем его общие свойства и устанавливаем его связь с матрицей плотности. В разделе 1.3 показано применение метода для описания системы из N кубитов в одномерном волноводе и получено общее уравнение движения для матричных элементов операторов перехода. В разделе 1.4 представлено общее выражение для спектральной плотности фотонов в терминах корреляционных функций спиновых операторов и показано, как они могут быть вычислены с помощью усредненных по вакууму операторов перехода и исходной матрицы плотности. В разделе 1.5 рассматривается одиночный кубит в волноводе, на котором максимально просто демонстрируется применение оператора перехода. В разделе 1.6 этот метод применяется к системе с двумя кубитами и используется для нахождения диагональных и недиагональных

матричных элементов оператора перехода. В разделе 1.7 вычисляются вероятности различных переходов между состояниями в системе с двумя кубитами, которые влияют на спектры излучения и скорости распада. Основные результаты работы представлены в разделе 1.8. Там получены общие выражения, которые позволяют рассчитать как спектры излучения, так и скорости затухания для произвольных начальных состояний двухкубитной системы. Проведен анализ некоторых начальных состояний, характерных для искусственных атомов в наноструктурах, и сравнение с распадом одиночного кубита, из которого наблюдаются эффекты сверх и суб-излучения. Наконец, в разделе 1.9 предлагается методика по восстановлению запутанного состояния двух кубитов с помощью ряда спектральных измерений. Выводы по проделанной работе представлены в заключении 1.10.

1.2. Общие свойства оператора перехода

Рассмотрим систему из N одинаковых кубитов с собственными состояниями $|i\rangle$, связанную с фотонными модами $|\nu\rangle$ в одномерном открытом волноводе. Нас в первую очередь интересует вероятность перехода из некоторого произвольного начального состояния кубитной системы $|\Psi_0\rangle$ без фотонов, в какое-то конечное состояние $|\Psi_1\rangle$ с полем из ν фотонов. Согласно общим принципам квантовой механики, амплитуда вероятности такого перехода задается следующим матричным элементом:

$$\langle\Psi_1,\nu|e^{-iHt}|\Psi_0,0\rangle, \quad (1.2.1)$$

где H это полный Гамильтониан, включающий N -кубитную систему, фотонные поля, и их взаимодействие. $|0\rangle, |\nu\rangle$ это Фоковские состояния с нулем и ν фотонов в волноводе, соответственно. Чтобы найти общую вероятность перехода, мы должны найти квадрат модуля этой амплитуды и просуммировать его по полному набору возможных конечных фотонных состояний поля $|\mu\rangle$:

$$W_{0\rightarrow 1} = \sum_{\mu} \left| \langle\Psi_1,\mu|e^{-iHt}|\Psi_0,0\rangle \right|^2. \quad (1.2.2)$$

Суммирование только по фотонным состояниям связано с тем, что любое конечное состояние цепочки кубитов всегда распадается до основного состояния ввиду эффекта спонтанного излучения.

Используя условие полноты набора фотонных состояний $\sum_{\mu} |\mu\rangle\langle\mu| = 1$, перепишем (1.2.2) в следующем виде:

$$W_{0 \rightarrow 1} = \langle \Psi_0 | \langle 0 | e^{iHt} | \Psi_1 \rangle \langle \Psi_1 | e^{-iHt} | 0 \rangle | \Psi_0 \rangle. \quad (1.2.3)$$

Разложив волновую функцию $|\Psi_1\rangle$ по полному набору состояний кубита $|i\rangle$ с некоторыми коэффициентами c_i , мы можем переписать (1.2.3) как:

$$W_{0 \rightarrow 1} = \sum_{i,j} c_i c_j^* \langle \Psi_0 | \langle e^{iHt} | i \rangle \langle j | e^{-iHt} \rangle_0 | \Psi_0 \rangle, \quad (1.2.4)$$

где $\langle \dots \rangle_0$ это усреднение по фотонному вакууму $\langle \dots \rangle_0 = \langle 0 | \dots | 0 \rangle$.

Опираясь на работу Лемберта [Lehmberg69], определим оператор перехода как:

$$P_{i,j}(t) = e^{iHt} |i\rangle \langle j| e^{-iHt}. \quad (1.2.5)$$

Выражение (1.2.4) тогда можно записать в следующем виде:

$$W_{0 \rightarrow 1} = \sum_{i,j} c_i c_j^* \langle \Psi_0 | \langle P_{i,j}(t) \rangle_0 | \Psi_0 \rangle. \quad (1.2.6)$$

Таким образом, вероятность перехода из собственного состояния $|n\rangle$ в собственное состояние $|m\rangle$ можно вычислить, используя соответствующий матричный элемент оператора перехода $P_{m,m}$, усредненный по фотонному вакууму:

$$W_{n \rightarrow m} = \langle n | \langle P_{m,m}(t) \rangle_0 | n \rangle. \quad (1.2.7)$$

Из полноты состояний кубитов $|i\rangle$ следует, что сумма диагональных элементов оператора перехода равна единице:

$$\sum_i P_{i,i} = 1. \quad (1.2.8)$$

Как следует из определения (1.2.5), выражения для элементов оператора перехода удовлетворяют уравнению Гейзенберга:

$$\frac{d}{dt} P_{i,j}(t) = i [H, P_{i,j}(t)], \quad (1.2.9)$$

с начальными условиями $P_{i,j}(0) = |i\rangle \langle j|$.

В случае много-атомных систем $N > 1$, привычные уравнения для средних значений спиновых операторов $\langle \sigma_i \rangle$ становятся нелинейными. В отличие от них, уравнения для операторов перехода $P_{i,j}$ линейны: они содержат только первые степени тех же операторов. Количество уравнений для оператора перехода определяется количеством состояний из полного набора. Например, у одного кубита существует только два состояния: возбужденное состояние

$|e\rangle$ и основное состояние $|g\rangle$. Соответственно, имеется четыре матричных элемента оператора перехода: $P_{e,e}$, $P_{g,g}$, $P_{e,g}$ и $P_{g,e}$. Однако независимых уравнений всего три, поскольку $P_{e,g}$ является эрмитово-сопряженным к $P_{g,e}$. Для двух кубитов существует четыре состояния и, следовательно, десять независимых уравнений, и так далее.

В общем случае матричные элементы оператора перехода, усредненные по фотонному вакууму, имеют следующий вид:

$$\langle P_{i,j}(t) \rangle_0 = \sum_{m,n} c_{mn}^{ij}(t) |m\rangle \langle n|, \quad (1.2.10)$$

где $c_{mn}^{ij}(t)$ это с-числа.

В принципе, мы можем выбрать базисные состояния кубитной системы следующим образом:

$$\langle P_{i,j}(t) \rangle_0 = \sum_{m,n} c_{mn}^{ij}(t) |m\rangle \langle n|, \quad i \neq j; \quad m \neq n; \quad (1.2.11)$$

$$\langle P_{i,i}(t) \rangle_0 = \sum_q c_q^i(t) |q\rangle \langle q|. \quad (1.2.12)$$

В этом случае недиагональные элементы (1.2.11) обеспечивают переходы между различными состояниями системы, в то время как диагональные элементы (1.2.12) оператора перехода имеют только диагональные матричные элементы в гильбертовом пространстве кубитной системы.

По определению, приведенная матрица плотности для кубитной системы $\rho_{S,ji}(t) = \langle j | \text{Tr}_V [\rho(t)] | i \rangle \equiv \langle j | \rho_S(t) | i \rangle$, где $\rho(t)$ это матрица плотности полной системы:

$$\rho(t) = e^{-iHt} \rho(0) e^{iHt}, \quad (1.2.13)$$

и она может быть выражена через средние значения операторов перехода как:

$$\rho_{S,ji}(t) = \text{Tr}_{S,V} (\rho(0) P_{i,j}(t)) \equiv \langle P_{i,j}(t) \rangle, \quad (1.2.14)$$

где след берется как по состояниям системы кубитов, так и по фотонным состояниям, а $\rho(0)$ — начальная матрица плотности всей системы. Если предположить, что изначально фотонное поле находится в вакуумном состоянии, т.е. в волноводе нет фотонов:

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_V(0) = \rho_S(0) \otimes |0\rangle \langle 0|, \quad (1.2.15)$$

то затем получим из (1.2.14):

$$\langle l | \rho_S(t) | m \rangle = \sum_{n,q} \langle n | \rho_S(0) | q \rangle \langle q | \langle P_{m,l}(t) \rangle_0 | n \rangle. \quad (1.2.16)$$

Следовательно, матричные элементы приведенной матрицы плотности можно выразить через матричные элементы вакуумного среднего от оператора перехода, если известна исходная матрица плотности $\rho_S(0)$. Следует отметить, что в отличие от элементов матрицы плотности,

которые являются числовыми функциями, матричные элементы $P_{i,j}(t)$ являются операторными функциями. Если система изначально находится в одном из своих базисных состояний $|s\rangle$ ($\langle s | \rho_S(0) | s \rangle = 1$), то из (1.2.15) следует:

$$\langle l | \rho_S(t) | m \rangle = \langle s | \langle P_{m,l}(t) \rangle_0 | s \rangle. \quad (1.2.17)$$

Для базисного набора со свойствами (1.2.11) и (1.2.12) из (1.2.17) следует, что недиагональные элементы приведенной матрицы плотности равны нулю. Для диагональных элементов приведенной матрицы плотности, которые, по сути, есть населенности уровней, получаем:

$$\langle m | \rho_S(t) | m \rangle = \langle s | \langle P_{m,m}(t) \rangle_0 | s \rangle. \quad (1.2.18)$$

Таким образом, если $m \neq s$, населенность $\langle m | \rho_S(t) | m \rangle$ можно трактовать как амплитуду перехода из начального состояния $|s\rangle$ в состояние $|m\rangle$.

1.3. Общее решение для много-кубитной системы

Рассмотрим систему, состоящую из N кубитов в одномерном бесконечном волноводе. Эту систему можно описать гамильтонианом Джейнса-Каммингса [Скалли03] (здесь и далее расчет ведется в частотных единицах, $\hbar = 1$):

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(1 + \sigma_z^{(n)} \right) \Omega_n + \int_0^\infty \omega \left(a^\dagger(\omega) a(\omega) + b^\dagger(\omega) b(\omega) \right) d\omega + \int_0^\infty \left(a^\dagger(\omega) S_-(\omega) + S_+(\omega) a(\omega) \right) d\omega + \int_0^\infty \left(b^\dagger(\omega) S_-^*(\omega) + S_+^*(\omega) b(\omega) \right) d\omega, \quad (1.3.1)$$

где также введены коллективные спиновые операторы:

$$S_-(\omega) = \sum_{n=1}^N g_n(\omega) e^{-i\omega x_n / v_g} \sigma_-^{(n)}, \quad S_+(\omega) = \sum_{n=1}^N g_n(\omega) e^{i\omega x_n / v_g} \sigma_+^{(n)}. \quad (1.3.2)$$

Здесь $\sigma_z^{(n)}$ — спиновый оператор Паули, Ω_n — резонансная частота n -го кубита, $a^\dagger(\omega), a(\omega)$ — операторы рождения (уничтожения) фотона, распространяющегося вправо, где ω — частота фотона, $b^\dagger(\omega), b(\omega)$ — операторы фотона для левой волны, v_g — групповая скорость фотонов, $\sigma_-^{(n)} = |g\rangle_{nn} \langle e|$ и $\sigma_+^{(n)} = |e\rangle_{nn} \langle g|$ это атомные операторы, понижающие или повышающие состояние n -го кубита, x_n — пространственная координата n -го кубита, $g_n(\omega)$ — константа связи n -го кубита с волноводом. Следует также отметить, что комплексно-сопряженные значения

(1.3.2), записываемые как $S_+^*(\omega)$, $S_-^*(\omega)$ соответствуют изменению направления волны, т.е. в них изменяется знак экспонент $e^{\pm i\omega x_n/v_g}$, но атомные операторы никак не изменяются.

Константа связи для заключенных в одномерном пространстве естественных атомов определяется следующим образом [Domokos02]:

$$g(\omega) = \sqrt{\frac{\omega}{4\pi\epsilon_0\hbar v_g S}} \cdot d, \quad (1.3.3a)$$

где d — недиагональный матричный элемент дипольного оператора, S — эффективное поперечное сечение мод в одномерном волноводе, ϵ_0 — электрическая постоянная. В случае искусственных атомов константа связи имеет идентичное выражение, также пропорциональное произведению электрического поля волновода и дипольного момента кубита, который зависит от конкретной реализации системы. Так, например, для типичного сверхпроводящего кубита типа трансмона [Koch07], связанного с одномерным микроволновым волноводом, дипольный момент выражается как [Lalumiere13]:

$$d_{иск} = e \sqrt{\frac{2\epsilon_0 c S}{c_g^2}} \left(\frac{E_J}{8E_C} \right)^{1/4} \quad (1.3.3b)$$

где e это заряд электрона, c — емкость линии передачи на единицу длины волновода, E_J и E_C — Джозефсоновская и зарядовая энергия кубита, c_g — эффективная емкость, связывающая кубит и волновод. Параметры E_J , E_C и c_g значительно зависят от внутренней топологии и структуры как самого кубита, так и способа его связи с волноводом или резонатором [Blais21]. В этом кроется ключевое отличие естественных атомов от искусственных — для последних мы можем настраивать константу связи на этапе проектировки образца, и после подгонять ее до необходимых значений с помощью управления готовой системой (например, с помощью магнитного потока). Кроме того, большие размеры сверхпроводящих кубитов позволяют получать силу связи, в много раз превышающую связь обыкновенных атомов с излучением в свободном пространстве (см. таблицу 1). С физической же точки зрения оба коэффициента (1.3.3a) и (1.3.3b) идентичны, и в дальнейшей работе мы не будем затрагивать их внутреннюю структуру.

Мы считаем связь симметричной, т.е. константы связи одинаковы для левых и правых фотонов. Также заметим, что размерность константы связи $g(\omega)$ — это не частота ω как обычно, а корень из частоты $\sqrt{\omega}$, а размерность операторов рождения и уничтожения $1/\sqrt{\omega}$. Такие размерности связаны с непрерывным, а не дискретным распределением полей в гамильтониане (1.3.1), т.н. continuous limit [Blow90].

Здесь мы предполагаем, что система кубитов может терять энергию только в канал излучения и не включаем в гамильтониан какие-либо безызлучательные каналы диссипации. Это связано с тем, что наш основной интерес состоит в изучении сверх- и субрадиантных эффектов, связанных со спонтанным излучением. Кроме того, для типичных сверхпроводящих систем в наноструктурах безызлучательный распад намного меньше полевой связи и скорости спонтанного излучения [Mlynek14, Sheremet23], в связи с чем ими можно пренебречь.

Из (1.2.9) и (1.3.1) получаем уравнение движения для оператора перехода:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} P_{i,j} = & \frac{i}{2} \sum_{n=1}^N \Omega_n e^{iHt} \left(\sigma_Z^{(n)} |i\rangle\langle j| - |i\rangle\langle j| \sigma_Z^{(n)} \right) e^{-iHt} \\
& + i \int_0^\infty d\omega a^\dagger(\omega, t) e^{iHt} \left(S_-(\omega) |i\rangle\langle j| - |i\rangle\langle j| S_-(\omega) \right) e^{-iHt} \\
& + i \int_0^\infty d\omega e^{iHt} \left(S_+(\omega) |i\rangle\langle j| - |i\rangle\langle j| S_+(\omega) \right) e^{-iHt} a(\omega, t) \\
& + i \int_0^\infty d\omega b^\dagger(\omega, t) e^{iHt} \left(S_-^*(\omega) |i\rangle\langle j| - |i\rangle\langle j| S_-^*(\omega) \right) e^{-iHt} \\
& + i \int_0^\infty d\omega e^{iHt} \left(S_+^*(\omega) |i\rangle\langle j| - |i\rangle\langle j| S_+^*(\omega) \right) e^{-iHt} b(\omega, t),
\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

где фотонные операторы записаны в представлении Гейзенберга:

$$a^\dagger(\omega, t) = e^{iHt} a^\dagger(\omega) e^{-iHt}, \quad a(\omega, t) = e^{iHt} a(\omega) e^{-iHt}. \tag{1.3.5}$$

В таком же виде записаны и операторы для левой волны $b^\dagger(\omega, t), b(\omega, t)$.

Из стандартного уравнения Гейзенберга получаем:

$$\frac{da(\omega, t)}{dt} = i[H(t), a(\omega, t)] = -i\omega a(\omega, t) - iS_-(\omega, t), \tag{1.3.6a}$$

$$\frac{da^\dagger(\omega, t)}{dt} = i[H(t), a^\dagger(\omega, t)] = i\omega a^\dagger(\omega, t) + iS_+(\omega, t), \tag{1.3.6b}$$

где $S_\pm(\omega, t)$ — операторы коллективного спина в представлении Гейзенберга. Формальное решение этих уравнений имеет вид:

$$a(\omega, t) = a(\omega, 0) e^{-i\omega t} - i \int_0^t e^{-i\omega(t-\tau)} S_-(\omega, \tau) d\tau, \tag{1.3.7a}$$

$$a^\dagger(\omega, t) = a^\dagger(\omega, 0) e^{i\omega t} + i \int_0^t e^{i\omega(t-\tau)} S_+(\omega, \tau) d\tau, \tag{1.3.7b}$$

где первый член в правой части (1.3.7) представляет собой свободное поле, а второй член — поле, излучаемое атомами. Мы можем получить аналогичные выражения для левых фотонов, заменив $S_{\pm}(\omega, \tau) \rightarrow S_{\pm}^*(\omega, \tau)$ и $a(\omega, 0) \rightarrow b(\omega, 0)$, $a^{\dagger}(\omega, 0) \rightarrow b^{\dagger}(\omega, 0)$.

Хотя полные операторы фотонов коммутируют с операторами коллективного спина $S_{\pm}(\omega, t)$, каждый член в (1.3.7) по отдельности с ними не коммутирует. Это объясняет расстановку этих операторов в третьем члене гамильтониана (1.3.1). Их следует расположить таким образом, чтобы в конечном выражении операторы рождения $a^{\dagger}(\omega, t), b^{\dagger}(\omega, t)$ располагались слева от оператора перехода P_{ij} , а операторы уничтожения $a(\omega, t), b(\omega, t)$ располагались справа. Это необходимо для того, чтобы при усреднении оператора перехода по фотонному вакууму члены, содержащие начальную фотонную часть, занулялись.

Подставляя выражения (1.3.7) в уравнение движения (1.3.4) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_{i,j} = & \frac{i}{2} \sum_{n=1}^N \Omega_n e^{iHt} \left(\sigma_Z^{(n)} |i\rangle\langle j| - |i\rangle\langle j| \sigma_Z^{(n)} \right) e^{-iHt} \\ & + i \int_0^{\infty} d\omega e^{i\omega t} e^{iHt} \left(a^{\dagger}(\omega, 0) [S_-(\omega), |i\rangle\langle j|] + b^{\dagger}(\omega, 0) [S_-^*(\omega), |i\rangle\langle j|] \right) e^{-iHt} \\ & + i \int_0^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} e^{iHt} \left([S_+(\omega), |i\rangle\langle j|] a(\omega, 0) + [S_+^*(\omega), |i\rangle\langle j|] b(\omega, 0) \right) e^{-iHt} \\ & - \int_0^{\infty} d\omega \int_0^t e^{i\omega(t-\tau)} S_+(\omega, \tau) d\tau e^{iHt} [S_-(\omega), |i\rangle\langle j|] e^{-iHt} + \int_0^{\infty} d\omega e^{iHt} [S_+(\omega), |i\rangle\langle j|] e^{-iHt} \int_0^t e^{-i\omega(t-\tau)} S_-(\omega, \tau) d\tau \\ & - \int_0^{\infty} d\omega \int_0^t e^{i\omega(t-\tau)} S_+^*(\omega, \tau) d\tau e^{iHt} [S_-^*(\omega), |i\rangle\langle j|] e^{-iHt} + \int_0^{\infty} d\omega e^{iHt} [S_+^*(\omega), |i\rangle\langle j|] e^{-iHt} \int_0^t e^{-i\omega(t-\tau)} S_-^*(\omega, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Здесь мы записываем уравнение таким образом, чтобы было ясно видно действие атомных операторов на состояния системы. Однако при желании уравнение (1.3.8) можно переписать в терминах операторов перехода и атомных операторов в представлении Гейзенберга, поскольку $e^{iHt} \sigma_Z^{(n)} |i\rangle\langle j| e^{-iHt} = \sigma_Z^{(n)}(t) P_{i,j}(t)$ (то же верно и для $S_{\pm}(\omega)$).

До сих пор мы не делали никаких приближений: приведенные выше выражения точны. Однако, для решения уравнения (1.3.8) необходимо сделать следующее предположение:

$$\sigma_-^{(n)}(\tau) \approx \sigma_-^{(n)}(t) e^{i\Omega_n(t-\tau)}, \quad \sigma_+^{(n)}(\tau) \approx \sigma_+^{(n)}(t) e^{-i\Omega_n(t-\tau)}. \quad (1.3.9)$$

В данном случае это эквивалентно приближению Вигнера-Вайскопфа, или марковскому приближению в случае нескольких кубитов [Lehmberg70a, Lalumiere13]. Оно опирается на тот факт, что $H_A / H_{int} \gg 1$, где H_A это часть гамильтониана, описывающая атомную систему, а H_{int}

– описывающая взаимодействие. В таком случае $\sigma_-^{(n)}(\tau) = e^{iH_A(\tau-t)} \sigma_-^{(n)}(t) e^{-iH_A(\tau-t)}$ и мы получаем выражение (1.3.9). Для типичных характеристик сверхпроводящих кубитов приближение $H_A / H_{int} \gg 1$ как правило выполняется, если кубиты не разнесены на достаточно значительные расстояния [Lalumiere13].

Полагая, что все частоты кубитов одинаковы и равны некоторому значению Ω , получим:

$$S_-(\omega, \tau) \approx S_-(\Omega, t) e^{i\Omega(t-\tau)}, \quad (1.3.10a)$$

$$S_+(\omega, \tau) \approx S_+(\Omega, t) e^{-i\Omega(t-\tau)}. \quad (1.3.10b)$$

Здесь мы также использовали так называемое резонансное приближение – функция связи $g_n(\omega)$ имеет наибольший вклад именно на резонансной частоте Ω_n , поэтому мы выносим ее значение в этой точке [Gardiner85, Shen09]. Как следствие, $S_{\pm}(\omega, t) \approx S_{\pm}(\Omega, t)$, что дает возможность извлечь $S_{\pm}(\omega, \tau)$ из подынтегральной функции в последней строке (1.3.8). Поскольку нас в первую очередь интересует распад изначально приготовленной кубитной системы, конечное время должно быть достаточно большим по сравнению с временами жизни кубита Γ^{-1} . Подняв верхний предел по времени до бесконечности, получим:

$$\int_0^t e^{\pm i(\omega-\Omega)(t-t')} dt' \approx \int_0^{\infty} e^{\pm i(\omega-\Omega)\tau} d\tau = \pi \delta(\omega - \Omega) \pm iP \left(\frac{1}{\omega - \Omega} \right), \quad (1.3.11)$$

где $\delta(\omega)$ — дельта-функция Дирака, а P — главное значение Коши.

Согласно всем вышеизложенным предположениям, из (1.3.8) получаем уравнение движения для оператора перехода в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_{i,j} = & \frac{i}{2} \sum_{n=1}^N \Omega_n e^{iHt} \left(\sigma_Z^{(n)} |i\rangle\langle j| - |i\rangle\langle j| \sigma_Z^{(n)} \right) e^{-iHt} \\ & + i \int_0^{\infty} d\omega e^{i\omega t} e^{iHt} \left(a^\dagger(\omega, 0) [S_-(\omega), |i\rangle\langle j|] + b^\dagger(\omega, 0) [S_-^*(\omega), |i\rangle\langle j|] \right) e^{-iHt} \\ & + i \int_0^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} e^{iHt} \left([S_+(\omega), |i\rangle\langle j|] a(\omega, 0) + [S_+^*(\omega), |i\rangle\langle j|] b(\omega, 0) \right) e^{-iHt} \\ & + \sum_{n,m} \frac{\Gamma_{n,m}}{2} e^{iHt} \left(2\sigma_+^{(m)} |i\rangle\langle j| \sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(n)} |i\rangle\langle j| - |i\rangle\langle j| \sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(n)} \right) e^{-iHt} \\ & + i \sum_{n,m} \alpha_{n,m} e^{iHt} \left(|i\rangle\langle j| \sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(n)} |i\rangle\langle j| \right) e^{-iHt}, \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

где мы ввели скорость распада $\Gamma_{n,m}$:

$$\Gamma_{n,m} = 4\pi g_n(\Omega) g_m(\Omega) \cos(k_0 d_{n,m}), \quad (1.3.13)$$

и частотный сдвиг $\alpha_{n,m}$:

$$\alpha_{n,m} = 2g_n(\Omega)g_m(\Omega)P \int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega d_{n,m}/\nu_g)}{\omega - \Omega} d\omega. \quad (1.3.14)$$

Здесь $k_0 = \Omega/\nu_g$, а $d_{n,m} = (x_n - x_m)$ — расстояние между n -м и m -м кубитом.

Уравнение (1.3.12) представляет собой наиболее общий случай уравнения движения матричных элементов оператора перехода (1.2.5) для N кубитов с одинаковыми резонансными частотами. Когда уравнение (1.3.12) усредняется по начальному фотонному вакууму, вторую и третью строку в (1.3.12) можно исключить.

Если мы предположим, что константы связи для разных кубитов одинаковы, $g_n = g_m \equiv g(\Omega)$, то мы можем далее упростить (1.3.13) и (1.3.14):

$$\Gamma_{n,m} = \Gamma \cos(k_0 d_{n,m}), \quad (1.3.15a)$$

$$\alpha_{n,m} = -\frac{\Gamma}{2} \sin(k_0 d_{n,m}), \quad (1.3.15b)$$

где Γ — скорость распада одиночного кубита в волновод:

$$\Gamma = 4\pi |g(\Omega)|^2. \quad (1.3.16)$$

Выражение (1.3.15b) получается с помощью следующего соотношения:

$$P \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega d_{n,m}/\nu_g)}{\omega - \Omega} d\omega = -\pi \sin(k_0 |d_{n,m}|), \quad (1.3.17)$$

которое оправдывается учетом не сохраняющих энергию членов во взаимодействии кубита с полем, т.е. за пределами приближения вращающейся волны (см. приложение в [Gonzalez13]). Тем не менее, в приближении вращающейся волны уравнение (1.3.17) обеспечивает хорошую точность для межкубитных расстояний $d > \lambda/4$ [Greenberg21b].

Величины $\Gamma_{n,m}$ и $\alpha_{n,m}$ отвечают за диссипативное и когерентное взаимодействия соответственно. Когерентное взаимодействие возникает в результате обмена виртуальными фотонами между кубитами на всех частотах континуума, за исключением одной частоты $\omega = \Omega$, и приводит к частотному сдвигу спектров кубитов. В отличие от случая свободного пространства, подобные взаимодействия сохраняются и на очень больших расстояниях. Однако, как следует из (1.3.15), взаимодействие между любыми двумя кубитами можно “отключить” правильным выбором значения $k_0 |d_{n,m}|$, например выбрав $k_0 d = n\pi$, где n — любое положительное целое число. Взаимодействие также пропадает, если расстояние устремить к нулю, что достаточно абсурдно с физической точки зрения. Такое поведение диполь-дипольного взаимодействия между кубитами связано с использованием приближения (1.3.17), которое перестает выполняться при сильном сближении кубитов. Тем не менее, как будет показано в следующей главе, для расстояний $d > \lambda/8$ такая модель описывает спектральные функции кубитной системы достаточно точно.

1.4. Спектры излучения и расчет корреляционных функций

В квантовой электродинамике на чипе возможно экспериментально измерить как полный фотонный спектр $\langle a^\dagger(\omega, t)a(\omega, t) \rangle$, так и одиночные средние значения фотонных операторов $\langle a(\omega, t) \rangle, \langle a^\dagger(\omega, t) \rangle$ [Caves82, Eichler12]. Кроме того, мы можем строить и более сложные фотонные корреляционные функции более высокого порядка, а также экспериментально измерять их [Kannan20]. Однако здесь мы фокусируемся только на фотонных функциях второго порядка, а именно $\langle a^\dagger a \rangle$ и $\langle b^\dagger b \rangle$, определяющие спектры излучения фотонов на правом и на левом концах волновода соответственно.

Из выражений для фотонных операторов (1.3.7) находим спектр излучения, наблюдаемый на правом конце волновода:

$$\langle a^\dagger(\omega, t)a(\omega, t) \rangle = \int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' e^{-i\omega(\tau-\tau')} \langle S_+(\omega, \tau)S_-(\omega, \tau') \rangle. \quad (1.4.1)$$

Аналогичный результат может быть получен для полей, распространяющихся влево:

$$\langle b^\dagger(\omega, t)b(\omega, t) \rangle = \int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' e^{-i\omega(\tau-\tau')} \langle S_+^*(\omega, \tau)S_-^*(\omega, \tau') \rangle. \quad (1.4.2)$$

Поскольку выражения (1.4.1) и (1.4.2) отличаются только комплексным сопряжением коллективных атомных операторов (1.3.2), сейчас мы сосредоточимся на $\langle a^\dagger a \rangle$.

Поскольку при выводе уравнения (1.3.12) мы использовали резонансное приближение, а это означает, что константа связи вносит вклад в основном на резонансной частоте кубита, логично принять $g^{(n)}(\omega) \approx g^{(n)}(\Omega)$, $k \approx k_0 = \Omega / v_g$. Из этого предположения следует, что $\langle S_+(\omega, \tau)S_-(\omega, \tau') \rangle \approx \langle S_+(\Omega, \tau)S_-(\Omega, \tau') \rangle$. Используя это, из (1.4.1) мы получаем полную скорость испускания фотонов:

$$W(t) = \frac{d}{dt} \int_0^\infty \langle a^\dagger(\omega, t)a(\omega, t) \rangle d\omega = \langle S_+(\Omega, t)S_-(\Omega, t) \rangle. \quad (1.4.3)$$

Данный параметр в дальнейшем мы будем именовать скоростью распада, поскольку он фактически характеризует скорость, с которой энергия уходит из первоначально возбужденной кубитной системы, и переходит в фотонные поля. Другими словами, $W(t)$ характеризует динамику процесса спонтанного распада кубитной системы в открытом волноводе.

Спектр фотонного излучения, зависящий от частоты, определяется как (1.4.1) по прошествии значительного промежутка времени, т.е. когда t стремится к бесконечности:

$$S(\omega) = \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\tau' e^{-i\omega(\tau-\tau')} \langle S_+(\Omega, \tau) S_-(\Omega, \tau') \rangle. \quad (1.4.4)$$

Под усреднением в приведенных выше уравнениях понимается взятие следа как по состояниям S кубитной системы, так и по состояниям v фотонного поля:

$$\langle S_+(\Omega, \tau) S_-(\Omega, \tau') \rangle = Tr_{S,v} [S_+(\Omega, \tau) S_-(\Omega, \tau') \rho(0)], \quad (1.4.5)$$

где $\rho(0)$ это начальная матрица плотности всей системы.

Из определения (1.3.2) находим:

$$\langle S_+(\Omega, \tau) S_-(\Omega, \tau') \rangle = \sum_{n,m} g_n(\Omega) g_m(\Omega) e^{ik_0(x_n - x_m)} \langle \sigma_+^{(n)}(\tau) \sigma_-^{(m)}(\tau') \rangle. \quad (1.4.6)$$

Важно понимать, что для фотонов, распространяющихся влево, т.е. $\langle b^\dagger b \rangle$, необходимо изменить знак показателя степени в (1.4.6).

Таким образом, как следует из полученных выше выражений, спектры излучения пропорциональны двух-временным корреляционным функциям типа $\langle \sigma_+^{(n)}(\tau) \sigma_-^{(m)}(\tau') \rangle$. Их можно найти двумя способами в зависимости от соотношения между τ и τ' . Если $\tau > \tau'$, то:

$$\langle \sigma_+^{(n)}(\tau) \sigma_-^{(m)}(\tau') \rangle = Tr_{S,v} \left[\rho(\tau') \sigma_+^{(n)}(\tau - \tau') \sigma_-^{(m)}(0) \right], \quad (1.4.7a)$$

и если $\tau < \tau'$, тогда:

$$\langle \sigma_+^{(n)}(\tau) \sigma_-^{(m)}(\tau') \rangle = Tr_{S,v} \left[\sigma_+^{(m)}(0) \sigma_-^{(n)}(\tau' - \tau) \rho(\tau) \right]. \quad (1.4.7b)$$

Два вида записи нужны ввиду того, что временной аргумент оператора спина всегда должен быть положительным. Кроме того, при получении (1.4.7) мы воспользовались правилом циклической перестановки, из-за чего матрица плотности начинает зависеть от времени τ' .

Выражения (1.4.7) точные. Если предположить, что система в начальный момент времени находится в состоянии фотонного вакуума (1.2.15), мы получим для (1.4.7a), (1.4.7b):

$$\langle \sigma_+^{(n)}(\tau) \sigma_-^{(m)}(\tau') \rangle = Tr_S \left[\rho_S(\tau') \langle \sigma_+^{(n)}(\tau - \tau') \rangle_0 \sigma_-^{(m)}(0) \right], \quad \tau > \tau' \quad (1.4.8a)$$

$$\langle \sigma_+^{(n)}(\tau) \sigma_-^{(m)}(\tau') \rangle = Tr_S \left[\sigma_+^{(m)}(0) \langle \sigma_-^{(n)}(\tau' - \tau) \rangle_0 \rho_S(\tau) \right], \quad \tau < \tau' \quad (1.4.8b)$$

С помощью (1.2.16) мы можем переписать матрицу плотности $\rho_S(t)$ в (1.4.8) через исходную матрицу плотности $\rho_S(0)$ и операторы перехода:

$$\langle \sigma_+^{(n)}(\tau) \sigma_-^{(m)}(\tau') \rangle_{\tau > \tau'} = \sum_{l,q} \sum_{s,p} \langle s | \rho_S(0) | p \rangle \langle p | \langle P_{q,l}(\tau') \rangle_0 | s \rangle \langle q | \langle \sigma_+^{(n)}(\tau - \tau') \rangle_0 \sigma_-^{(m)}(0) | l \rangle, \quad (1.4.9a)$$

$$\langle \sigma_+^{(n)}(\tau) \sigma_-^{(m)}(\tau') \rangle_{\tau < \tau'} = \sum_{l,q} \sum_{s,p} \langle l | \sigma_+^{(n)}(0) \langle \sigma_-^{(m)}(\tau' - \tau) \rangle_0 | q \rangle \langle s | \rho_S(0) | p \rangle \langle p | \langle P_{l,q}(\tau) \rangle_0 | s \rangle, \quad (1.4.9b)$$

Величина $\langle \sigma_{\pm}^{(n)}(\tau - \tau') \rangle_0$ в (1.4.9), которая относится к конкретному n -му кубиту системы должна быть выражена через матричные элементы оператора перехода, действующего в коллективном базисе кубитной системы.

Собрав все вместе и предполагая, что сила связи для разных кубитов одинакова, мы имеем следующее выражение для спектра (1.4.1):

$$\langle a^{\dagger}(\omega, t) a(\omega, t) \rangle = \sum_{n,m}^N \frac{\Gamma}{4\pi} e^{ik_0 d_{n,m}} \times \Xi_{n,m}(\omega, t), \quad (1.4.10)$$

$$\Xi_{n,m}(\omega, t) = \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} d\tau' e^{-i\omega(\tau-\tau')} \langle \sigma_+^{(n)}(\tau) \sigma_-^{(m)}(\tau') \rangle_{\tau > \tau'} + \int_0^t d\tau \int_{\tau}^t d\tau' e^{-i\omega(\tau-\tau')} \langle \sigma_+^{(n)}(\tau) \sigma_-^{(m)}(\tau') \rangle_{\tau < \tau'}, \quad (1.4.11)$$

где двух-временные корреляционные функции приведены в (1.4.9) для разных интервалов времени, а скорость затухания Γ определена в (1.3.16). Выражение (1.4.10) представляет спектр для прямого движения фотонов, то есть он измеряется на правой стороне волновода. Но мы можем легко найти спектры обратного излучения как:

$$\langle b^{\dagger}(\omega, t) b(\omega, t) \rangle = \sum_{n,m}^N \frac{\Gamma}{4\pi} e^{-ik_0 d_{n,m}} \times \Xi_{n,m}(\omega, t), \quad (1.4.12)$$

Отметим, что данный подход позволяет рассчитывать не только двух-временные корреляционные функции, подобные (1.4.7), но и более сложные. В (1.4.9) мы уменьшаем усредненное значение двух операторов до среднего значения одного оператора, умноженного на второй оператор в нулевой момент времени. По тому же принципу можно свести, скажем, четырехкратную корреляционную функцию к трехкратной корреляционной функции, которую таким же образом можно свести к двукратной корреляционной функции и так далее. Таким образом, мы можем находить корреляционные функции более высокого порядка, используя только операторы перехода, найденные из (1.3.12).

1.5. Одно-кубитная система

В этом разделе мы применяем подход оператора перехода к одному кубиту, встроенному в одномерный бесконечный волновод. Эта простейшая модель позволяет понять все преимущества и возможности метода оператора перехода. Здесь мы находим матричные элементы оператора перехода для однокубитной системы и применяем их для расчета вероятностей перехода и спектра излучения.

1.5.1. Операторы перехода для одного кубита

Для одного кубита в волноводе ($N = 1$) базисные состояния системы будут представлены двумя состояниями: $|e\rangle$ и $|g\rangle$, соответствующими возбужденному состоянию и основному состоянию кубита соответственно. Если мы выберем расположение кубита в центре координат ($x_l = 0$), то уравнение (1.3.12) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_{i,j} = & i \frac{\Omega}{2} e^{iHt} (\sigma_Z |i\rangle\langle j| - |i\rangle\langle j| \sigma_Z) e^{-iHt} \\ & + i \int_0^\infty d\omega e^{i\omega t} g(\omega) (a^\dagger(\omega, 0) + b^\dagger(\omega, 0)) e^{iHt} [\sigma_-, |i\rangle\langle j|] e^{-iHt} \\ & + i \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega t} g(\omega) e^{iHt} [\sigma_+, |i\rangle\langle j|] e^{-iHt} (a(\omega, 0) + b(\omega, 0)) \\ & + \frac{\Gamma}{2} e^{iHt} (2\sigma_+ |i\rangle\langle j| \sigma_- - \sigma_+ \sigma_- |i\rangle\langle j| - |i\rangle\langle j| \sigma_+ \sigma_-) e^{-iHt}, \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

где $\Gamma_{1,1} = \Gamma$, $\alpha_{1,1} = 0$ и $i, j = e, g$. Подставив состояния и перейдя к форме записи через операторы перехода, мы получаем следующие три уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_{e,e} = & -\Gamma P_{e,e}(t) + i \int_0^\infty g(\omega) e^{i\omega t} (a^\dagger(\omega, 0) + b^\dagger(\omega, 0)) P_{g,e}(t) d\omega \\ & - i \int_0^\infty g(\omega) e^{-i\omega t} P_{e,g}(t) (a(\omega, 0) + b(\omega, 0)) d\omega, \end{aligned} \quad (1.5.2a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_{g,g} = & \Gamma P_{e,e}(t) - i \int_0^\infty g(\omega) e^{i\omega t} (a^\dagger(\omega, 0) + b^\dagger(\omega, 0)) P_{g,e}(t) d\omega \\ & + i \int_0^\infty g(\omega) e^{-i\omega t} P_{e,g}(t) (a(\omega, 0) + b(\omega, 0)) d\omega, \end{aligned} \quad (1.5.2b)$$

$$\frac{d}{dt} P_{e,g} = \left(i\Omega - \frac{\Gamma}{2} \right) P_{e,g}(t) + i \int_0^\infty g(\omega) e^{i\omega t} (a^\dagger(\omega, 0) + b^\dagger(\omega, 0)) (P_{g,g}(t) - P_{e,e}(t)) d\omega. \quad (1.5.2c)$$

Легко увидеть, что уравнения (1.5.2) линейны, т.е. в правой части остаются только линейные члены, содержащие операторы перехода. Также следует обратить внимание, что всего операторов перехода четыре, но последние два сопряжены друг другу ($P_{g,e} = P_{e,g}^*$), поэтому достаточно вычислить только три из них.

Поскольку мы считаем, что изначально в системе нет фотонов, уравнения (1.5.2) следует усреднять по вакуумному состоянию $\langle \dots \rangle_0 = \langle 0 | \dots | 0 \rangle$. Как уже говорилось выше, начальные значения фотонных полей в таком случае равны нулю, $\langle a(\omega, 0) \rangle_0 = \langle b(\omega, 0) \rangle_0 = 0$, и мы получим:

$$\frac{d}{dt} \langle P_{e,e} \rangle_0 = -\Gamma \langle P_{e,e}(t) \rangle_0, \quad (1.5.3a)$$

$$\frac{d}{dt} \langle P_{g,g} \rangle_0 = \Gamma \langle P_{e,e}(t) \rangle_0, \quad (1.5.3b)$$

$$\frac{d}{dt} \langle P_{e,g} \rangle_0 = \left(i\Omega - \frac{\Gamma}{2} \right) \langle P_{e,g}(t) \rangle_0. \quad (1.5.3c)$$

Принимая во внимание, что начальные значения оператора перехода $P_{i,j}(0) = |i\rangle\langle j|$, решение уравнений (1.5.3) определяется выражениями:

$$\langle P_{e,e}(t) \rangle_0 = e^{-\Gamma t} |e\rangle\langle e|, \quad (1.5.4a)$$

$$\langle P_{g,g}(t) \rangle_0 = 1 - e^{-\Gamma t} |e\rangle\langle e|, \quad (1.5.4b)$$

$$\langle P_{e,g}(t) \rangle_0 = e^{(i\Omega - \Gamma/2)t} |e\rangle\langle g|. \quad (1.5.4c)$$

Еще раз отметим, что в отличие от аналогичных уравнений для элементов матрицы плотности, полученные значения (1.5.4) являются операторными функциями.

1.5.2. Вероятности переходов для одного кубита

Используя полученные выражения (1.5.4), мы можем вычислить вероятности перехода для одного кубита. Используя соотношение (1.2.7), находим для первоначально возбужденного кубита:

$$W_{e \rightarrow e} = \langle e | \langle P_{e,e}(t) \rangle_0 | e \rangle = e^{-\Gamma t}, \quad W_{e \rightarrow g} = \langle e | \langle P_{g,g}(t) \rangle_0 | e \rangle = 1 - e^{-\Gamma t}. \quad (1.5.5)$$

Таким образом, изначально возбужденный кубит экспоненциально распадается в основное состояние, что есть обычная динамика спонтанного излучения. Если кубит изначально находился в основном состоянии, вероятности его перехода в возбужденное и основное состояния равны нулю и единице соответственно:

$$W_{g \rightarrow e} = \langle g | \langle P_{e,e}(t) \rangle_0 | g \rangle = 0, \quad W_{g \rightarrow g} = \langle g | \langle P_{g,g}(t) \rangle_0 | g \rangle = 1. \quad (1.5.6)$$

Полученные результаты хорошо известны и рассмотрены здесь исключительно в качестве примера демонстрации метода оператора перехода на простой системе.

1.5.3. Спектры излучения одного кубита

В разделе 1.4 мы нашли спектры для двух направлений распространения фотонов, левого и правого. Однако если мы рассматриваем систему всего из одного кубита, расположенного в центре волновода, то в силу очевидной симметрии выражения (1.4.10) и (1.4.12) будут идентичны: $\langle a^\dagger a \rangle = \langle b^\dagger b \rangle$. Значит нам достаточно найти только одно из них и из (1.4.11) получаем:

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(\omega, t) a(\omega, t) \rangle &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau' e^{-i\omega(\tau-\tau')} \langle \sigma_+(\tau) \sigma_-(\tau') \rangle_+ \\ &+ \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^t d\tau \int_\tau^t d\tau' e^{-i\omega(\tau-\tau')} \langle \sigma_+(\tau) \sigma_-(\tau') \rangle_- . \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

Чтобы найти решение, нам нужно выразить атомные операторы понижения и повышения через операторы перехода $P_{i,j}(t)$. Из определений $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$, $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ и (1.2.5), нетрудно показать, что в представлении Гейзенберга их можно записать в следующем виде:

$$\sigma_+(t) = e^{iHt} |g\rangle\langle e| e^{-iHt} = P_{e,g}(t), \quad \sigma_-(t) = e^{iHt} |e\rangle\langle g| e^{-iHt} = P_{g,e}(t). \quad (1.5.11)$$

Подставляя это в (1.4.9), получаем:

$$\langle \sigma_+(\tau) \sigma_-(\tau') \rangle_+ = \langle e | \rho_S(0) | e \rangle \langle e | \langle P_{e,e}(\tau') \rangle_0 | e \rangle \langle e | \langle P_{e,g}(\tau - \tau') \rangle_0 | g \rangle, \quad (1.5.12a)$$

$$\langle \sigma_+(\tau) \sigma_-(\tau') \rangle_- = \langle e | \rho_S(0) | e \rangle \langle g | \langle P_{g,e}(\tau' - \tau) \rangle_0 | e \rangle \langle e | \langle P_{e,e}(\tau) \rangle_0 | e \rangle. \quad (1.5.12b)$$

Используя полученные значения операторов перехода (1.5.4), можно доказать, что двух-временные корреляционные функции (1.5.12) одинаковы для обоих временных интервалов $\tau > \tau'$, $\tau < \tau'$ и равны:

$$\langle \sigma_+(\tau) \sigma_-(\tau') \rangle = e^{(i\Omega - \Gamma/2)\tau} e^{-(i\Omega + \Gamma/2)\tau'} \langle e | \rho_S(0) | e \rangle. \quad (1.5.13)$$

Используя все соотношения, получаем окончательное выражение для спектра:

$$\langle a^\dagger(\omega, t) a(\omega, t) \rangle = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\left(e^{(i\omega - i\Omega - \Gamma/2)t} - 1 \right) \left(e^{-(i\omega - i\Omega + \Gamma/2)t} - 1 \right)}{(\omega - \Omega)^2 + \Gamma^2 / 4} \langle e | \rho_S(0) | e \rangle. \quad (1.5.14)$$

Если рассматривать систему в течение достаточно длительного промежутка, что соответствует устремлению времени на бесконечность, $t \rightarrow \infty$, мы получим спектральную плотность:

$$S(\omega) = \frac{\Gamma / 4\pi}{(\omega - \Omega)^2 + \Gamma^2 / 4} \langle e | \rho_S(0) | e \rangle. \quad (1.5.15)$$

Наконец, с помощью (1.4.3) мы получаем скорость испускания фотонов:

$$W(t) = \frac{\Gamma}{4\pi} \langle \sigma_+(t) \sigma_-(t) \rangle = \frac{\Gamma}{4\pi} e^{-\Gamma t} \langle e | \rho_S(0) | e \rangle. \quad (1.5.16)$$

Следует обратить внимание, что все расчеты проведены без уточнения начального состояния матрицы плотности системы $\rho_S(0)$, что как раз присуще методу оператора перехода. Из (1.5.14) хорошо видно, что спектр излучения отличен от нуля только для начального состояния с возбужденным кубитом $\rho_S(0) = |e\rangle\langle e|$ или для состояния с произвольной суперпозицией $\rho_S(0) = (p|e\rangle + q|g\rangle)(p^*\langle e| + q^*\langle g|)$. Для этих состояний как спектр, так и скорость излучения имеют известный вид: одиночный лоренцев пик на резонансной частоте и экспоненциальный распад со скоростью Γ соответственно.

1.6. Операторы перехода для двух-кубитной системы

Для двухкубитной системы мы будем использовать так называемый базис Дикке, состоящий из четырех состояний:

$$|G\rangle = |gg\rangle, \quad |E\rangle = |ee\rangle, \quad |S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ge\rangle + |eg\rangle), \quad |A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ge\rangle - |eg\rangle). \quad (1.6.1)$$

Преимущество этого базиса состоит в том, что уравнения движения диагональных матричных элементов оператора перехода не зависят от недиагональных, что станет ясно позже.

Используя определения операторов понижения и повышения кубитных состояний для стандартного базиса, легко показать, как они действуют на новые базисные состояния (1.6.1):

$$\begin{aligned} \sigma_+^{(1,2)} |G\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|S\rangle \mp |A\rangle), & \sigma_-^{(1,2)} |E\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|S\rangle \pm |A\rangle), \\ \sigma_+^{(1,2)} |E\rangle &= 0, & \sigma_-^{(1,2)} |G\rangle &= 0, \\ \sigma_+^{(1,2)} |S\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |E\rangle, & \sigma_-^{(1,2)} |S\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |G\rangle, \\ \sigma_+^{(1,2)} |A\rangle &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} |E\rangle, & \sigma_-^{(1,2)} |A\rangle &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} |G\rangle. \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

То же самое легко проделать и для спиновых операторов Паули:

$$\begin{aligned} \sigma_Z^{(1,2)} |G\rangle &= -|G\rangle, & \sigma_Z^{(1,2)} |E\rangle &= |E\rangle, \\ \sigma_Z^{(1,2)} |A\rangle &= \mp |S\rangle, & \sigma_Z^{(1,2)} |S\rangle &= \mp |A\rangle. \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

Далее, берем $N = 2$ в уравнении (1.3.12), откуда получаем скорости распада $\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = \Gamma$, $\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \Gamma \cos(k_0 d)$, и частотные сдвиги $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = \Gamma \sin(k_0 d) / 2$,

где d это расстояние между кубитами. Стоит уточнить, что отдельные затухающие члены могут быть отрицательными (Γ_{12} и Γ_{21}), однако полная сумма по всем элементам Γ всегда будет положительной. Усредняя уравнение (1.3.12) по вакуумному состоянию $|0\rangle$, члены, включающие фотонные операторы во второй строке (1.3.12), уйдут, и мы можем получить уравнения для матричных элементов оператора перехода. Всего для базиса (1.6.1) мы имеем шестнадцать уравнений, но поскольку операторы недиагонального перехода P_{ij} являются эрмитовым сопряжением P_{ji} то достаточно найти решение только для десяти матричных элементов. Для диагональных матричных элементов оператора перехода (которые мы будем называть населенностями по аналогии с диагональными элементами матрицы плотности) находим:

$$\frac{d\langle P_{E,E} \rangle_0}{dt} = -2\Gamma \langle P_{E,E} \rangle_0, \quad (1.6.4a)$$

$$\frac{d\langle P_{S,S} \rangle_0}{dt} = \Gamma(1 + \cos k_0 d) (\langle P_{E,E} \rangle_0 + \langle P_{S,S} \rangle_0), \quad (1.6.4b)$$

$$\frac{d\langle P_{A,A} \rangle_0}{dt} = \Gamma(1 - \cos k_0 d) (\langle P_{E,E} \rangle_0 - \langle P_{A,A} \rangle_0), \quad (1.6.4c)$$

$$\frac{d\langle P_{G,G} \rangle_0}{dt} = \Gamma(1 + \cos k_0 d) \langle P_{S,S} \rangle_0 + \Gamma(1 - \cos k_0 d) \langle P_{A,A} \rangle_0. \quad (1.6.4d)$$

Для недиагональных матричных элементов оператора перехода (которые мы будем называть когерентностями) получаем:

$$\frac{d\langle P_{G,E} \rangle_0}{dt} = -(2i\Omega + \Gamma) \langle P_{G,E} \rangle_0, \quad (1.6.5a)$$

$$\frac{d\langle P_{A,S} \rangle_0}{dt} = -\Gamma(1 + i \sin k_0 d) \langle P_{A,S} \rangle_0, \quad (1.6.5b)$$

$$\frac{d\langle P_{A,E} \rangle_0}{dt} = -i \left(\Omega + \frac{\Gamma}{2} \sin k_0 d \right) \langle P_{A,E} \rangle_0 - \frac{\Gamma}{2} (3 - \cos k_0 d) \langle P_{A,E} \rangle_0, \quad (1.6.5c)$$

$$\frac{d\langle P_{S,E} \rangle_0}{dt} = -i \left(\Omega - \frac{\Gamma}{2} \sin k_0 d \right) \langle P_{S,E} \rangle_0 - \frac{\Gamma}{2} (3 + \cos k_0 d) \langle P_{S,E} \rangle_0, \quad (1.6.5d)$$

$$\frac{d\langle P_{G,A} \rangle_0}{dt} = -i \left(\Omega - \frac{\Gamma}{2} \sin k_0 d \right) \langle P_{G,A} \rangle_0 - \Gamma(1 - \cos k_0 d) \langle P_{A,E} \rangle_0 - \frac{\Gamma}{2} (1 - \cos k_0 d) \langle P_{G,A} \rangle_0, \quad (1.6.5e)$$

$$\frac{d\langle P_{G,S} \rangle_0}{dt} = -i \left(\Omega + \frac{\Gamma}{2} \sin k_0 d \right) \langle P_{G,S} \rangle_0 + \Gamma(1 + \cos k_0 d) \langle P_{S,E} \rangle_0 - \frac{\Gamma}{2} (1 + \cos k_0 d) \langle P_{G,S} \rangle_0. \quad (1.6.5f)$$

Таким образом, в базисе (1.6.1) уравнения для населенностей отделены от уравнений для когерентностей. При этом первые четыре уравнения когерентностей полностью независимы и связаны только с соответствующими им матричными элементами. Эти уравнения достаточно легко решаются, поскольку начальные условия, основанные на определении оператора перехода (1.2.5), всегда известны: $P_{i,j}(0) = |i\rangle\langle j|$.

Решая две группы уравнений, мы находим все матричные элементы оператора перехода двухкубитной системы в открытом волноводе. Для населенностей мы получаем следующие решения:

$$\langle P_{E,E}(t) \rangle_0 = e^{-2\Gamma t} |E\rangle\langle E|, \quad (1.6.6a)$$

$$\langle P_{S,S}(t) \rangle_0 = |S\rangle\langle S| e^{-\Gamma t} - \frac{1 + \cos k_0 d}{1 - \cos k_0 d} \left(e^{-2\Gamma t} - e^{-\Gamma t} \right) |E\rangle\langle E|, \quad (1.6.6b)$$

$$\langle P_{A,A}(t) \rangle_0 = |A\rangle\langle A| e^{-\Gamma t} - \frac{1 - \cos k_0 d}{1 + \cos k_0 d} \left(e^{-2\Gamma t} - e^{-\Gamma t} \right) |E\rangle\langle E|, \quad (1.6.6c)$$

$$\begin{aligned} \langle P_{G,G}(t) \rangle_0 = & |G\rangle\langle G| - \left(e^{-\Gamma t} - 1 \right) |S\rangle\langle S| - \left(e^{-\Gamma t} - 1 \right) |A\rangle\langle A| \\ & + \frac{(1 + \cos k_0 d)^2}{1 - \cos k_0 d} \left[\frac{(e^{-2\Gamma t} - 1)}{2} - \frac{(e^{-\Gamma t} - 1)}{1 + \cos k_0 d} \right] |E\rangle\langle E| + \frac{(1 - \cos k_0 d)^2}{1 + \cos k_0 d} \left[\frac{(e^{-2\Gamma t} - 1)}{2} - \frac{(e^{-\Gamma t} - 1)}{1 - \cos k_0 d} \right] |E\rangle\langle E|. \end{aligned} \quad (1.6.6d)$$

Для когерентностей получаем:

$$\langle P_{G,E}(t) \rangle_0 = e^{-(2i\Omega + \Gamma)t} |G\rangle\langle E|, \quad (1.6.7a)$$

$$\langle P_{A,S}(t) \rangle_0 = e^{-\Gamma(1 + i \sin k_0 d)t} |A\rangle\langle S|, \quad (1.6.7b)$$

$$\langle P_{A,E}(t) \rangle_0 = e^{-\left(i\Omega_+ + \frac{\Gamma_-}{2} + \Gamma\right)t} |A\rangle\langle E|, \quad (1.6.7c)$$

$$\langle P_{S,E}(t) \rangle_0 = e^{-\left(i\Omega_- + \frac{\Gamma_+}{2} + \Gamma\right)t} |S\rangle\langle E|, \quad (1.6.7d)$$

$$\langle P_{G,A}(t) \rangle_0 = e^{-\left(i\Omega_- + \frac{\Gamma_-}{2}\right)t} |G\rangle\langle A| + \frac{1 - \cos k_0 d}{1 + i \sin k_0 d} \left(e^{-\left(i\Omega_+ + \frac{\Gamma_-}{2} + \Gamma\right)t} - e^{-\left(i\Omega_- + \frac{\Gamma_-}{2}\right)t} \right) |A\rangle\langle E|, \quad (1.6.7e)$$

$$\langle P_{G,S}(t) \rangle_0 = e^{-\left(i\Omega_+ + \frac{\Gamma_+}{2}\right)t} |G\rangle\langle S| - \frac{1 + \cos k_0 d}{1 - i \sin k_0 d} \left(e^{-\left(i\Omega_- + \frac{\Gamma_+}{2} + \Gamma\right)t} - e^{-\left(i\Omega_+ + \frac{\Gamma_+}{2}\right)t} \right) |S\rangle\langle E|. \quad (1.6.7f)$$

Здесь для упрощения записи введены смещенные из-за межкубитного взаимодействия резонансные частоты и коллективные скорости затухания:

$$\begin{aligned}\Omega_+ &= \Omega + \frac{\Gamma}{2} \sin k_0 d, & \Omega_- &= \Omega - \frac{\Gamma}{2} \sin k_0 d, \\ \Gamma_+ &= \Gamma(1 + \cos k_0 d), & \Gamma_- &= \Gamma(1 - \cos k_0 d),\end{aligned}\tag{1.6.8}$$

которые зависят от эффективного расстояния между кубитами $k_0 d$.

В отличие от обычного решения матрицы плотности, выражения (1.6.6) и (1.6.7) являются операторными функциями. Тем не менее, зная выражения для матричных элементов оператора перехода, мы легко можем найти матрицу плотности, используя соотношения (1.2.14) или (1.2.15).

1.7. Вероятности переходов для двух кубитов

Для обоих кубитов, первоначально находящихся в возбужденном состоянии $|\Psi_0\rangle = |ee\rangle = |E\rangle$, мы можем найти вероятность того, что через время t система останется в исходном состоянии:

$$W_{E \rightarrow E} = \langle E | P_{E,E} | E \rangle = e^{-2\Gamma t}.\tag{1.7.1}$$

Вероятности распада обоих кубитов на симметричное и асимметричное состояние следующие:

$$W_{E \rightarrow S} = \langle E | P_{S,S} | E \rangle = -\frac{1 + \cos k_0 d}{1 - \cos k_0 d} \left(e^{-2\Gamma t} - e^{-\Gamma(1 + \cos k_0 d)t} \right),\tag{1.7.2}$$

$$W_{E \rightarrow A} = \langle E | P_{A,A} | E \rangle = -\frac{1 - \cos k_0 d}{1 + \cos k_0 d} \left(e^{-2\Gamma t} - e^{-\Gamma(1 - \cos k_0 d)t} \right).\tag{1.7.3}$$

Если кубиты изначально находятся в симметричном, $|\Psi_0\rangle = (|ge\rangle + |eg\rangle)/\sqrt{2} = |S\rangle$, или асимметричном, $|\Psi_0\rangle = (|ge\rangle - |eg\rangle)/\sqrt{2} = |A\rangle$ состояниях, то вероятность что система сохранит начальное состояние, есть:

$$W_{S \rightarrow S} = \langle S | P_{S,S} | S \rangle = e^{-\Gamma(1 + \cos k_0 d)t},\tag{1.7.4}$$

$$W_{A \rightarrow A} = \langle A | P_{A,A} | A \rangle = e^{-\Gamma(1 - \cos k_0 d)t}.\tag{1.7.5}$$

Как хорошо видно из (1.6.6b) и (1.6.6c), переходы между симметричными и асимметричными состояниями запрещены:

$$W_{A \rightarrow S} = \langle A | P_{S,S} | A \rangle = 0, \quad W_{S \rightarrow A} = \langle S | P_{A,A} | S \rangle = 0.\tag{1.7.6}$$

Следовательно, состояния $|A\rangle$ и $|S\rangle$ полностью разделены друг от друга, независимо от значения $k_0 d$.

Симметричные и асимметричные состояния имеют разные скорости распада, которые зависят от значения k_0d . Как видно из (1.7.4), (1.7.5) для заданного значения k_0d скорость распада для состояния $|S\rangle$ всегда больше, чем для состояния $|A\rangle$. Кроме того, для $k_0d = 2n\pi$, где n — целое положительное число или 0, популяция $|A\rangle$ остаётся постоянной ($W_{A \rightarrow A} = 1$). В этом случае состояние $|A\rangle$ называется тёмным состоянием, поскольку оно не взаимодействует с электромагнитным полем, а состояние $|S\rangle$ называется светлым состоянием. Если $k_0d = (2n+1)\pi$, ситуация обратная: состояние $|S\rangle$ становится темным состоянием, а состояние $|A\rangle$ становится светлым.

Наконец, для расчета $W(t)$ нам понадобятся недиагональные матричные элементы:

$$\langle A | \langle P_{A,S}(t) \rangle_0 | S \rangle = e^{-\Gamma(1+i \sin k_0d)t}. \quad (1.7.7)$$

Переходы (1.7.2-1.7.3) зависят от эффективного расстояния между кубитами k_0d . Например, для $k_0d = \pi/2$ существуют равные вероятности перехода в симметричное и асимметричное состояния, $W_{E \rightarrow S} = W_{E \rightarrow A} = e^{-2\Gamma t} - e^{-\Gamma t}$.

Отдельно стоит рассмотреть случай, когда $k_0d = n\pi$. В этом случае и числитель, и знаменатель в (1.7.2) и (1.7.3) стремятся к нулю. Правильное решение можно получить, если подставить $k_0d = n\pi$ непосредственно в уравнения (1.6.4b) и (1.6.4c) или разложив в ряд $\cos(k_0d)$ в окрестности точки $k_0d \approx n\pi + \varepsilon$, где ε — малая величина. Оба подхода дают один и тот же результат. При $k_0d = 2n\pi$ получаем следующие вероятности перехода:

$$W_{E \rightarrow S} = 2\Gamma t e^{-2\Gamma t}, \quad W_{E \rightarrow A} = 0. \quad (1.7.8)$$

Как хорошо видно из (1.7.8), для четного числа $n = 0, 2, 4 \dots$ переход из состояния $|E\rangle$ в асимметричное запутанное состояние $|A\rangle$ запрещен. Для нечетного числа $n = 1, 3 \dots$ ситуация обратная: переход в симметричное состояние теперь запрещен, а для перехода в асимметричное состояние получаем соотношение $W_{E \rightarrow A} = 2\Gamma t e^{-2\Gamma t}$.

1.8. Интерференционные эффекты для двух кубитов в волноводе

Теперь перейдем к расчету спектра излучения двухкубитной системы. Как было показано в разделе 1.4, спектр можно найти с помощью набора атомных корреляционных функций. Для $N = 2$ из (1.4.10) получаем:

$$\langle a^\dagger(\omega, t)a(\omega, t) \rangle = \langle a^\dagger(\omega, t)a(\omega, t) \rangle_+ + \langle a^\dagger(\omega, t)a(\omega, t) \rangle_-, \quad (1.8.1a)$$

$$\langle a^\dagger(\omega, t)a(\omega, t) \rangle_+ = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau' e^{-i\omega(\tau-\tau')} \Theta_{a^\dagger a}(\tau, \tau'), \quad (1.8.1b)$$

$$\langle a^\dagger(\omega, t)a(\omega, t) \rangle_- = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^t d\tau \int_\tau^t d\tau' e^{-i\omega(\tau-\tau')} \Theta_{a^\dagger a}(\tau, \tau'), \quad (1.8.1c)$$

где:

$$\begin{aligned} \Theta_{a^\dagger a}(\tau, \tau') &= \langle \sigma_+^{(1)}(\tau) \sigma_-^{(1)}(\tau') \rangle + \langle \sigma_+^{(2)}(\tau) \sigma_-^{(2)}(\tau') \rangle \\ &+ e^{-ik_0 d} \langle \sigma_+^{(1)}(\tau) \sigma_-^{(2)}(\tau') \rangle + e^{ik_0 d} \langle \sigma_+^{(2)}(\tau) \sigma_-^{(1)}(\tau') \rangle. \end{aligned} \quad (1.8.2a)$$

Если мы хотим найти спектр обратного излучения $\langle b^\dagger(\omega, t)b(\omega, t) \rangle$, то (1.8.2a) необходимо заменить другой функцией:

$$\begin{aligned} \Theta_{b^\dagger b}(\tau, \tau') &= \langle \sigma_+^{(1)}(\tau) \sigma_-^{(1)}(\tau') \rangle + \langle \sigma_+^{(2)}(\tau) \sigma_-^{(2)}(\tau') \rangle \\ &+ e^{ik_0 d} \langle \sigma_+^{(1)}(\tau) \sigma_-^{(2)}(\tau') \rangle + e^{-ik_0 d} \langle \sigma_+^{(2)}(\tau) \sigma_-^{(1)}(\tau') \rangle, \end{aligned} \quad (1.8.2b)$$

Далее мы в основном сосредоточимся на спектре, измеряемом на правом конце волновода, поскольку многие начальные условия дают одинаковый результат для обоих спектров из-за симметрии системы. Для некоторых начальных состояний, тем не менее, рассмотрены оба спектра.

Также отметим, что для корректного расчета двухвременных корреляционных функций мы делим весь спектр (1.8.1a) на две части, для $\tau > \tau'$ (1.8.1b) и для $\tau < \tau'$ (1.8.1c).

Чтобы найти полные спектры (1.8.1a), необходимо вычислить корреляционные функции, используя (1.4.9). Из (1.6.2) мы можем выразить операторы понижения и повышения спина через базисные состояния (1.6.1):

$$\sigma_+^{(1,2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|S\rangle\langle G| \mp |A\rangle\langle G| + |E\rangle\langle S| \pm |E\rangle\langle A|), \quad (1.8.3a)$$

$$\sigma_-^{(1,2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|G\rangle\langle S| \mp |G\rangle\langle A| + |S\rangle\langle E| \pm |A\rangle\langle E|), \quad (1.8.3b)$$

и, перейдя к представлению Гейзенберга, получим что:

$$\sigma_+^{(1,2)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (P_{S,G}(t) \mp P_{A,G}(t) + P_{E,S}(t) \pm P_{E,A}(t)), \quad (1.8.4a)$$

$$\sigma_-^{(1,2)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (P_{G,S}(t) \mp P_{G,A}(t) + P_{S,E}(t) \pm P_{A,E}(t)). \quad (1.8.4b)$$

Таким образом, можно найти полные спектры (1.8.1а), вычислив четыре двух-временные корреляционные функции с использованием уже полученных выражений для операторов перехода (1.6.6) и (1.6.7).

Для $\tau > \tau'$ получаем следующее общее выражение:

$$\begin{aligned} \left\langle a^\dagger(\omega, t) a(\omega, t) \right\rangle_+ &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau' e^{-i\omega(\tau-\tau')} \times [\\ &(1 + \cos k_0 d) \left(\langle E | \langle P_{S,G}(\tau - \tau') \rangle_0 | S \rangle \langle E | \langle P_{E,E}(\tau') \rangle_0 | E \rangle + \langle E | \langle P_{E,S}(\tau - \tau') \rangle_0 | S \rangle \langle E | \langle P_{E,E}(\tau') \rangle_0 | E \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle S | \langle P_{S,G}(\tau - \tau') \rangle_0 | G \rangle \langle E | \langle P_{S,S}(\tau') \rangle_0 | E \rangle \right) \langle E | \rho_S(0) | E \rangle \\ &+ (1 - \cos k_0 d) \left(\langle E | \langle P_{E,A}(\tau - \tau') \rangle_0 | A \rangle \langle E | \langle P_{E,E}(\tau') \rangle_0 | E \rangle - \langle E | \langle P_{A,G}(\tau - \tau') \rangle_0 | A \rangle \langle E | \langle P_{E,E}(\tau') \rangle_0 | E \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle A | \langle P_{A,G}(\tau - \tau') \rangle_0 | G \rangle \langle E | \langle P_{A,A}(\tau') \rangle_0 | E \rangle \right) \langle E | \rho_S(0) | E \rangle \\ &+ (1 + \cos k_0 d) \langle S | \langle P_{S,G}(\tau - \tau') \rangle_0 | G \rangle \langle S | \langle P_{S,S}(\tau') \rangle_0 | S \rangle \langle S | \rho_S(0) | S \rangle \\ &+ (1 - \cos k_0 d) \langle A | \langle P_{A,G}(\tau - \tau') \rangle_0 | G \rangle \langle A | \langle P_{A,A}(\tau') \rangle_0 | A \rangle \langle A | \rho_S(0) | A \rangle \\ &+ i \sin k_0 d \langle A | \langle P_{A,G}(\tau - \tau') \rangle_0 | G \rangle \langle A | \langle P_{A,S}(\tau') \rangle_0 | S \rangle \langle S | \rho_S(0) | A \rangle \\ &- i \sin k_0 d \langle S | \langle P_{S,G}(\tau - \tau') \rangle_0 | G \rangle \langle S | \langle P_{S,A}(\tau') \rangle_0 | A \rangle \langle A | \rho_S(0) | S \rangle], \end{aligned} \quad (1.8.5)$$

и для $\tau < \tau'$ получаем:

$$\begin{aligned} \left\langle a^\dagger(\omega, t) a(\omega, t) \right\rangle_- &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^t d\tau \int_\tau^t d\tau' e^{-i\omega(\tau-\tau')} \times [\\ &(1 + \cos k_0 d) \left(\langle S | \langle P_{G,S}(\tau' - \tau) \rangle_0 | E \rangle \langle E | \langle P_{E,E}(\tau) \rangle_0 | E \rangle + \langle S | \langle P_{S,E}(\tau' - \tau) \rangle_0 | E \rangle \langle E | \langle P_{E,E}(\tau) \rangle_0 | E \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle G | \langle P_{G,S}(\tau' - \tau) \rangle_0 | S \rangle \langle E | \langle P_{S,S}(\tau) \rangle_0 | E \rangle \right) \langle E | \rho_S(0) | E \rangle \\ &+ (1 - \cos k_0 d) \left(\langle A | \langle P_{A,E}(\tau' - \tau) \rangle_0 | E \rangle \langle E | \langle P_{E,E}(\tau) \rangle_0 | E \rangle - \langle A | \langle P_{G,A}(\tau' - \tau) \rangle_0 | E \rangle \langle E | \langle P_{E,E}(\tau) \rangle_0 | E \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle G | \langle P_{G,A}(\tau' - \tau) \rangle_0 | A \rangle \langle E | \langle P_{A,A}(\tau) \rangle_0 | E \rangle \right) \langle E | \rho_S(0) | E \rangle \\ &+ (1 + \cos k_0 d) \langle G | \langle P_{G,S}(\tau' - \tau) \rangle_0 | S \rangle \langle S | \langle P_{S,S}(\tau) \rangle_0 | S \rangle \langle S | \rho_S(0) | S \rangle \\ &+ (1 - \cos k_0 d) \langle G | \langle P_{G,A}(\tau' - \tau) \rangle_0 | A \rangle \langle A | \langle P_{A,A}(\tau) \rangle_0 | A \rangle \langle A | \rho_S(0) | A \rangle \\ &- i \sin k_0 d \langle G | \langle P_{G,A}(\tau' - \tau) \rangle_0 | A \rangle \langle S | \langle P_{S,A}(\tau) \rangle_0 | A \rangle \langle A | \rho_S(0) | S \rangle \\ &+ i \sin k_0 d \langle G | \langle P_{G,S}(\tau' - \tau) \rangle_0 | S \rangle \langle A | \langle P_{A,S}(\tau) \rangle_0 | S \rangle \langle S | \rho_S(0) | A \rangle]. \end{aligned} \quad (1.8.6)$$

Как видно из (1.8.5), (1.8.6) только исходная матрица плотности вида $\rho_S(0) = a | E \rangle \langle E | + b | A \rangle \langle A | + c | S \rangle \langle S | + d | A \rangle \langle S | + f | S \rangle \langle A |$ вносит вклад в спектр излучения, где $a, b,$

c, d, f — произвольные комплексные значения. Для обратно распространяющихся спектров $\langle b^\dagger b \rangle$ необходимо изменить знаки двух последних слагаемых в (1.8.5) и (1.8.6), которые пропорциональны $\langle S | \rho_S(0) | A \rangle, \langle A | \rho_S(0) | S \rangle$.

Полную скорость излучения (1.4.3) для спектров прямого излучения можно легко найти следующим образом:

$$W^R(t) = \frac{\Gamma}{4\pi} \Theta_{a^\dagger a}(t, t) = \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\langle \sigma_+^{(1)}(t) \sigma_-^{(1)}(t) \rangle + \langle \sigma_+^{(2)}(t) \sigma_-^{(2)}(t) \rangle + e^{-ik_0 d} \langle \sigma_+^{(1)}(t) \sigma_-^{(2)}(t) \rangle + e^{ik_0 d} \langle \sigma_+^{(2)}(t) \sigma_-^{(1)}(t) \rangle \right), \quad (1.8.7)$$

где $\langle \sigma_+^{(i)}(t) \sigma_-^{(j)}(t) \rangle$ можно найти с помощью $\tau = \tau' = t$ в любом из уравнений (1.4.9). Здесь R означает, что волна распространяется в правом направлении. Таким образом, скорость распада можно легко рассчитать, поскольку она пропорциональна корреляционным функциям для одного времени t . С помощью выражений для спиновых операторов (1.8.4) мы можем выразить (1.8.7) через операторы перехода как:

$$W^R(t) = \langle E | \rho_S(0) | E \rangle \times \frac{1}{4\pi} \left(2\Gamma \langle E | \langle P_{E,E}(t) \rangle_0 | E \rangle + \Gamma_+ \langle E | \langle P_{S,S}(t) \rangle_0 | E \rangle + \Gamma_- \langle E | \langle P_{A,A}(t) \rangle_0 | E \rangle \right) + \frac{\Gamma_+}{4\pi} \langle S | \langle P_{S,S}(t) \rangle_0 | S \rangle \langle S | \rho_S(0) | S \rangle + \frac{\Gamma_-}{4\pi} \langle A | \langle P_{A,A}(t) \rangle_0 | A \rangle \langle A | \rho_S(0) | A \rangle + i \frac{\Gamma}{4\pi} \sin k_0 d \langle A | \langle P_{A,S}(t) \rangle_0 | S \rangle \langle S | \rho_S(0) | A \rangle - i \frac{\Gamma}{4\pi} \sin k_0 d \langle S | \langle P_{S,A}(t) \rangle_0 | A \rangle \langle A | \rho_S(0) | S \rangle. \quad (1.8.8)$$

Скорость обратного излучения $W^L(t) \sim \Theta_{b^\dagger b}(t, t)$ можно найти, изменив знаки двух последних членов в (1.8.8), по аналогии со спектром (1.8.5), (1.8.6)

Выражения (1.8.5), (1.8.6) и (1.8.8) являются главным результатом этой главы, который мы используем в дальнейшем для расчета сверх- и субрадиантных спектров и скоростей излучения в двух-кубитной системе для различных начальных конфигураций. Еще раз отметим главное преимущество нашего расчета — данные выражения можно применить к любой исходной матрице плотности $\rho_S(0)$, и таким образом рассмотреть любое начальное состояние системы.

Ниже мы рассмотрим несколько конфигураций возбуждения в двухкубитной системе. Для каждой конфигурации мы рассчитываем спектр излучения фотонов и общую скорость эмиссии фотонов для различных значений $k_0 d$. Чтобы выявить влияние второго кубита на спектр излучения, мы сравниваем эти величины с аналогичными выражениями для одиночного кубита.

Анализ состояний с одним возбуждением во многом подтверждает теоретические предсказания из работы [Макаров03], а именно формирование долго-живущих состояний для симметричной суперпозиции и различие в спектрах излучения на разных концах волновода для состояния $|eg\rangle$.

1.8.1. Начальное симметричное и асимметричное состояния

Начнем с изначально подготовленных запутанных состояний в виде симметричного состояния $|\Psi(0)\rangle = (|e_1g_2\rangle + |g_1e_2\rangle)/\sqrt{2} = |S\rangle$ и асимметричного состояния $|\Psi(0)\rangle = (|g_1e_2\rangle - |e_1g_2\rangle)/\sqrt{2} = |A\rangle$. Экспериментальная методика получения таких запутанных состояний широко известна в области КЭД и может быть реализована с помощью последовательности гейтов Адамара и CNOT [Wendin17].

Вклад симметричных и асимметричных начальных состояний, $\rho_S(0) = |S\rangle\langle S|$, $\rho_A(0) = |A\rangle\langle A|$ одинаков для обоих направлений распространения фотона, поскольку только недиагональные элементы матрицы плотности в (1.8.5-1.8.6) меняют знак. Следовательно, соответствующие спектры одинаковы для разных направлений: $\langle a^\dagger a \rangle = \langle b^\dagger b \rangle$. Из (1.8.5), (1.8.6) и (1.6.6b-1.6.7f) получаем:

$$\langle a^\dagger(\omega, t) a(\omega, t) \rangle_S = \frac{\Gamma_+}{4\pi} \frac{\left(e^{(i\delta_+ - \Gamma_+/2)t} - 1 \right) \left(e^{-(i\delta_+ + \Gamma_+/2)t} - 1 \right)}{\delta_+^2 + \Gamma_+^2/4}, \quad (1.8.9)$$

где мы ввели параметр расстройки для смещенных частот:

$$\delta_+ = \omega - \Omega_+, \quad \delta_- = \omega - \Omega_-. \quad (1.8.10)$$

Если теперь устремить время к бесконечности, $t \rightarrow \infty$, мы получим спектр излучения, зависящий только от частоты:

$$S_S(\omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma_+}{\left(\delta_+^2 + \Gamma_+^2/4 \right)}. \quad (1.8.11)$$

Для полной скорости распада из (1.8.8) получаем:

$$W_S(t) = \frac{\Gamma_+}{4\pi} e^{-\Gamma_+ t}. \quad (1.8.12)$$

Процедура расчета для асимметричного состояния $\rho_A(0) = |A\rangle\langle A|$ аналогична. Для этого начального состояния получаем следующие выражения спектра, спектральной плотности и скорости излучения:

$$\langle a^\dagger(\omega, t) a(\omega, t) \rangle_A = \frac{\Gamma_-}{4\pi} \frac{\left(e^{(i\delta_- - \Gamma_-/2)t} - 1 \right) \left(e^{-(i\delta_- + \Gamma_-/2)t} - 1 \right)}{\delta_-^2 + \Gamma_-^2/4}, \quad (1.8.13)$$

$$S_A(\omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma_-}{\left(\delta_-^2 + \Gamma_-^2/4 \right)}, \quad (1.8.14)$$

$$W_A(t) = \frac{\Gamma_-}{4\pi} e^{-\Gamma_- t}. \quad (1.8.15)$$

Ниже мы сравниваем эти величины с величинами для первоначально возбужденного одиночного кубита $\rho_S(0) = |e\rangle\langle e|$ с частотой Ω и скоростью распада Γ , которые мы получили в разделе 1.5, выражения (1.5.15) и (1.5.16).

Как видно из (1.8.11) и (1.8.14), оба спектра представляют собой лоренцевы линии, центральные частоты и ширины которых зависят от $k_0 d$. Полная скорость излучения (1.8.12) и (1.8.15) также зависит от $k_0 d$. Для приближения Дикке $k_0 d = 0$ получаем $W_A = 0$, $W_S = \Gamma e^{-2\Gamma t}$. Сравнение этого результата с (1.5.16) показывает, что в этом случае распад двух-кубитной системы происходит с удвоенной скоростью. Это явление называется сверхизлучением Дикке [Dicke54], и физически оно связано с формированием суперпозиционного состояния, называемого светлым состоянием $|B\rangle = (|eg\rangle + |ge\rangle)/\sqrt{2}$, скорость распада которого из-за возникающей конструктивной интерференции между состояниями $|eg\rangle, |ge\rangle$ равна 2Γ .

Применительно к нашей задаче важно отметить, что в отличие от свободного пространства в одномерной геометрии случай Дикке $k_0 d = 0$ возникает также для любого $k_0 d = 2n\pi$, где n — целое положительное число.

Спектры излучения для начальных состояний $|S\rangle$ и $|A\rangle$ вместе с соответствующими значениями скоростей испускания фотонов W_S, W_A для различных значений $k_0 d$ показаны на рис. 1.2 и рис. 1.3 соответственно. Из данных графиков легко увидеть, что процесс спонтанного излучения в значительной степени меняется при разном расположении кубитов друг относительно друга. Для двух-кубитной системы это проявляется в разных видах интерференционных эффектов, которые можно разделить на три крайних случая: сверхизлучение, т.е. ускоренный распад состояния; суб-излучение, т.е. замедленный распад; и когерентное обменное взаимодействие, когда кубиты распадаются практически независимо друг от друга и взаимодействуют только через виртуальные фотоны.

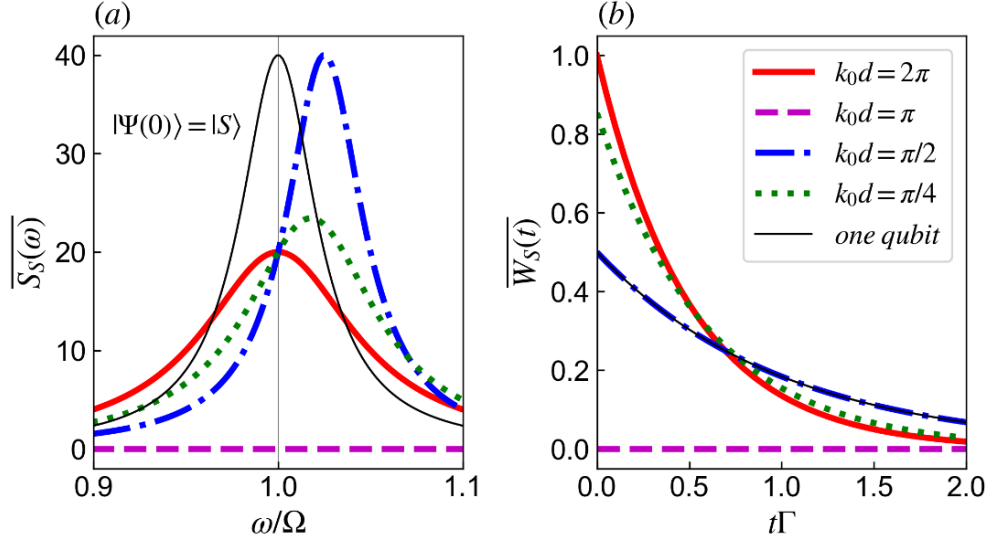


Рис. 1.2. (a) Спектры излучения $\overline{S_S(\omega)} = 2\pi \Omega S_S(\omega)$, выражение (1.8.11) и (b) временная зависимость скорости испускания фотонов $\overline{W_S(t)} = 2\pi W_S(t)/\Gamma$, выражение (1.8.12), для начального симметричного состояния $|S\rangle$. Для сравнения одно-кубитный случай показан тонкой черной линией; $\Gamma/\Omega = 0,05$.

Из (1.8.12) мы видим, что при $k_0 d = 2\pi$ коллективная скорость распада Γ_+ становится равной удвоенной скорости распада одиночного кубита: $\Gamma_+ = 2\Gamma$. Это демонстрируется сплошной красной линией на рис. 1.2b. Начальная интенсивность излучения фотонов в этом случае в два раза выше, чем у одиночного кубита. Спектральный максимум при этом не смещается. Спектр $S_S(\omega)$ аналогичен спектру одиночного кубита, но с удвоенной шириной линии и двукратным уменьшением пикового значения. Все это есть проявление сверхизлучения Дикке, когда ширина спектральной линии пропорциональна числу атомов в системе, в нашем случае $N = 2$. Данный эффект подтверждается экспериментальными данными из работы [Mlynek14].

При $k_0 d = \pi/2$ скорости эмиссии для двух- и однокубитных систем одинаковы; пунктирная синяя линия на (рис. 1.2b) накладывается на черную линию для одного кубита. Их спектральные линии также одинаковы, но смещены на $\Gamma/2$. В этом случае между кубитами происходит когерентное обменное взаимодействие, связанное с излучением и перепоглощением виртуальных фотонов, в ходе которого и появляется частотный сдвиг, а некогерентное взаимодействие фактически равно нулю, из-за чего оба кубита распадаются практически независимо друг от друга [Lalumiere13].

Если $k_0 d = \pi$, скорость распада Γ_+ становится нулевой, так что симметричное состояние $|S\rangle$ вообще не излучает, т.е. становится так называемым “темным” состоянием $|D\rangle$. По аналогии со

светлым состоянием $|B\rangle$, формирование темного состояния связано с интерференцией состояний $|eg\rangle, |ge\rangle$, но в этот раз деструктивной. Поэтому можно ожидать, что в окрестности $k_0d = \pi$ существует область долго-живущих субрадиантных состояний с $\Gamma_{sub} \ll \Gamma$.

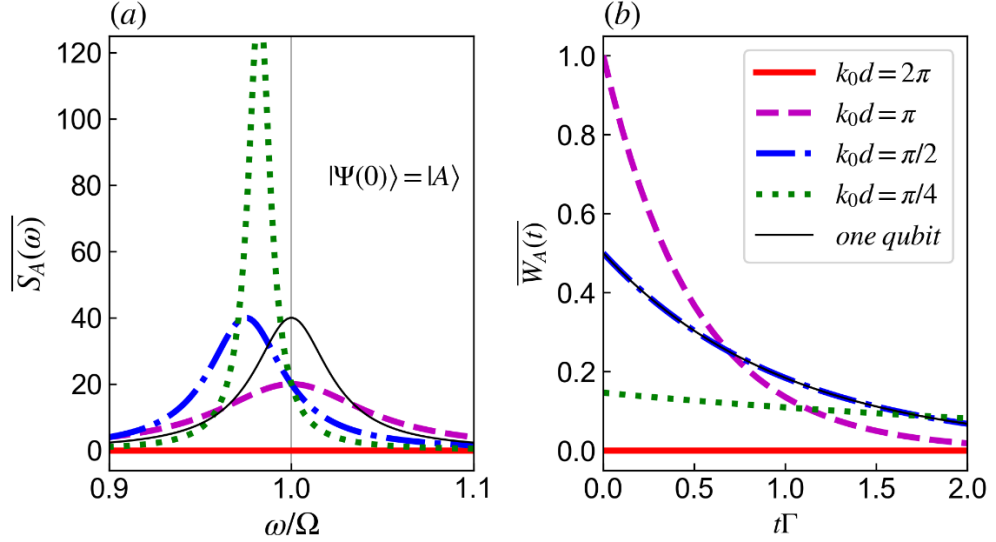


Рис. 1.3. (a) Спектры излучения $\overline{S_A(\omega)} = 2\pi \Omega S_A(\omega)$, выражение (1.8.14) и (b) временная зависимость скорости испускания фотонов $\overline{W_A(t)} = 2\pi W_A(t)/\Gamma$, выражение (1.8.15)), для начального асимметричного состояния $|A\rangle$. Для сравнения однокубитный случай показан тонкой черной линией; $\Gamma/\Omega = 0,05$.

Несколько иная картина распада изначально асимметричного состояния $|A\rangle$ показана на рис. 1.3. Сверхизлучение наблюдается при $k_0d = \pi$ (фиолетовая пунктирная линия на рис. 1.3b). При $k_0d = \pi/2$ линии спада скоростей эмиссии для двух- и однокубитных систем совпадают (рис. 1.3b). Спектральная линия двухкубитной системы идентична линии одиночного кубита, но сдвинута влево на $\Gamma/2$. Характерное проявление субрадиантного распада асимметричного состояния наблюдается при $k_0d = \pi/4$ (зеленая пунктирная линия на рис. 1.3b). Этот распад происходит заметно медленнее, чем распад сверхизлучения (фиолетовая пунктирная линия на рис. 1.3b). Ширина его спектральной линии намного меньше, чем у одиночного кубита (фиолетовая пунктирная линия на рис. 1.3a). Если $k_0d = 2\pi$, состояние $|A\rangle$ не излучает. Таким образом, здесь также можно ожидать, что в окрестностях $k_0d = 2\pi$ существует набор субрадиантных состояний $\Gamma_{sub} \ll \Gamma$.

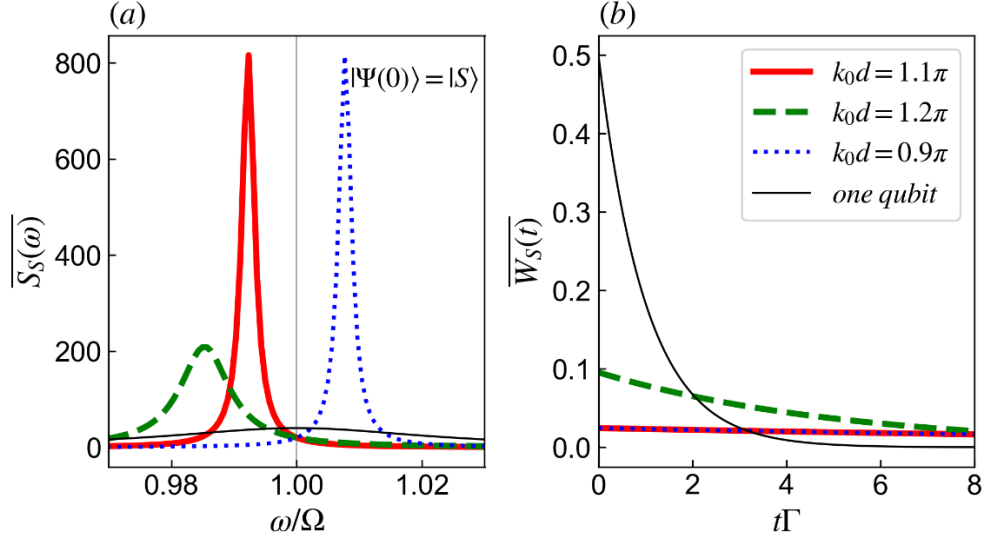


Рис. 1.4. Три субрадиантных распада исходного состояния $|S\rangle$ для $k_0d = 1,1\pi$ (сплошная красная линия), $k_0d = 1,2\pi$ (пунктирная зеленая линия) и $k_0d = 0,9\pi$ (точечная синяя линия). (a) Спектры излучения $\overline{S_S(\omega)} = 2\pi \Omega S_S(\omega)$; (b) Скорость затухания $\overline{W_S(t)} = 2\pi W_S(t) / \Gamma$. Однокубитный случай показан тонкой сплошной линией; $\Gamma/\Omega = 0,05$.

Сходство распада состояний $|S\rangle$ и $|A\rangle$ наблюдается при $k_0d = (n+1/2)\pi$, что соответствует $\lambda_0 = 2d / (n+1/2)$, где $\lambda_0 = 2\pi \Omega / \nu_g$. В этом случае спектры излучения как для симметричного, так и для асимметричного состояний имеют одинаковую ширину линии $\Gamma_+ = \Gamma_- = \Gamma$, но их максимумы сдвинуты в противоположные стороны из-за частотного сдвига $\delta_{\pm} = \omega - (\Omega \pm \Gamma/2)$. Физически это можно объяснить тем, что когерентное обменное взаимодействие для состояний $|S\rangle$ и $|A\rangle$ имеет противоположную фазу, что и приводит к частотному сдвигу в разные стороны. Эволюция скоростей распада данных состояний совпадает с распадом одиночного кубита.

Как видно из рис. 1.1 и рис. 1.2, в окрестностях точек $k_0d = \pi$ и $k_0d = 2\pi$ расположено много суб-радиантных состояний для начальных значений $|S\rangle$ и $|A\rangle$ соответственно. Например, три таких субрадиантных состояния показаны на рис. 1.4 для начального состояния $|S\rangle$.

1.8.2. Начальное состояние с одним возбужденным кубитом

Теперь рассмотрим начальное состояние, когда возбужден только первый кубит $|\Psi(0)\rangle = |e_1g_2\rangle$. Соответствующая начальная матрица плотности определяется выражением:

$$\rho_S(0) = |eg\rangle\langle eg| = \frac{1}{2}|S-A\rangle\langle S-A|. \quad (1.8.16)$$

Из (1.8.16) видно, что два члена, пропорциональные $|S\rangle\langle S|$ и $|A\rangle\langle A|$ дают нам тот же результат, который мы получили в предыдущем разделе. Следовательно, нам нужно найти вклад только недиагональных элементов $\rho(0)$.

Используя (1.8.5), (1.8.6) и явные выражения для операторов перехода (1.6.6), (1.6.7) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(\omega, t)a(\omega, t) \rangle_{eg} &= \frac{1}{2} \langle a^\dagger(\omega, t)a(\omega, t) \rangle_S + \frac{1}{2} \langle a^\dagger(\omega, t)a(\omega, t) \rangle_A \\ &+ i \frac{\Gamma}{8\pi} \sin k_0 d \left[\frac{\left(e^{-(i\delta_- + \Gamma_-/2)t} - 1 \right) \left(e^{(i\delta_+ - \Gamma_+/2)t} - 1 \right)}{(i\delta_- + \Gamma_-/2)(i\delta_+ - \Gamma_+/2)} - \frac{\left(e^{-(i\delta_+ + \Gamma_+/2)t} - 1 \right) \left(e^{(i\delta_- - \Gamma_-/2)t} - 1 \right)}{(i\delta_+ + \Gamma_+/2)(i\delta_- - \Gamma_-/2)} \right], \end{aligned} \quad (1.8.17)$$

где первые два слагаемых даны в (1.8.9) и (1.8.13). В пределе $t \rightarrow \infty$ находим спектральную плотность:

$$S_{eg}^R(\omega) = \frac{1}{2} S_S(\omega) + \frac{1}{2} S_A(\omega) - \frac{\Gamma}{8\pi} \frac{\sin k_0 d (\delta_- \Gamma_+ - \delta_+ \Gamma_-)}{(\delta_+^2 + \Gamma_+^2/4)(\delta_-^2 + \Gamma_-^2/4)}, \quad (1.8.18)$$

где $S_S(\omega)$ и $S_A(\omega)$ даны в (1.8.11) и (1.8.14). Наконец, для общей скорости распада получаем:

$$W_{eg}^R(t) = \frac{\Gamma_+}{8\pi} e^{-\Gamma_+ t} + \frac{\Gamma_-}{8\pi} e^{-\Gamma_- t} - \frac{\Gamma \sin k_0 d}{4\pi} e^{-\Gamma t} \sin(\Gamma \sin(k_0 d) t). \quad (1.8.19)$$

В выражениях (1.8.17-1.8.19) первые два слагаемых соответствуют вкладу состояний $|S\rangle$ и $|A\rangle$, а третий интерференционный член обусловлен вкладом недиагональных матричных элементов оператора перехода (последние две строки в уравнениях (1.8.5), (1.8.6), (1.8.8)).

Буква R отмечает, что излучение распространяется в прямом направлении, и измеряется с правой стороны волновода (right). Для обратного излучения $\langle b^\dagger b \rangle$ необходимо изменить знак интерференционного члена в (1.8.17), что приводит к следующим выражениям:

$$S_{eg}^L(\omega) = \frac{1}{2} S_S(\omega) + \frac{1}{2} S_A(\omega) + \frac{\Gamma}{8\pi} \frac{\sin k_0 d (\delta_- \Gamma_+ - \delta_+ \Gamma_-)}{(\delta_+^2 + \Gamma_+^2/4)(\delta_-^2 + \Gamma_-^2/4)}, \quad (1.8.20a)$$

$$W_{eg}^L(t) = \frac{\Gamma_+}{8\pi} e^{-\Gamma_+ t} + \frac{\Gamma_-}{8\pi} e^{-\Gamma_- t} + \frac{\Gamma \sin k_0 d}{4\pi} e^{-\Gamma t} \sin(\Gamma \sin(k_0 d) t). \quad (1.8.20b)$$

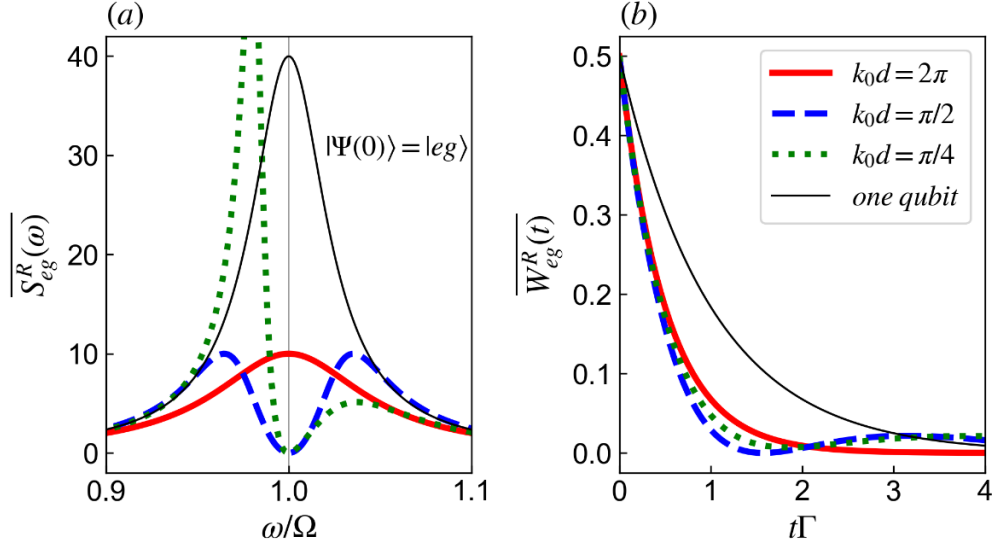


Рис. 1.5. (a) Спектры прямого излучения $\overline{S_{eg}^R(\omega)} = 2\pi \Omega S_{eg}^R(\omega)$ для первоначально возбужденного первого кубита; (b) Скорость распада в прямом направлении $\overline{W_{eg}^R} = 2\pi W_{eg}^R / \Gamma$ для первоначально возбужденного первого кубита; Для сравнения однокубитный случай показан черной тонкой линией; $\Gamma/\Omega = 0,05$.

Спектры излучения и скорости затухания для полей, идущих направо, показаны на рис. 1.5. Здесь интерференционные члены в уравнениях (1.8.18) и (1.8.19) существенно меняют картину. Если k_0d кратно π , то интерференционный член равен нулю. Следовательно, при $k_0d = 2\pi$ существует сверхизлучательное состояние (красная сплошная линия на рис. 1.5а и б) со скоростью распада, равной 2Γ , $W_{eg}^R(t) = 0.5\Gamma e^{-2\Gamma t}$. Таким образом, в нашей системе возникает одноатомное [Dicke54] или однофотонное [Scully09] сверхизлучение, при котором распад возбужденного атома с повышенной скоростью в присутствии второго атома происходит даже тогда, когда второй атом находится в основном состоянии. Этот результат также согласуется с экспериментальными данными [Mlynek14].

Физически эффект однофотонного сверхизлучения можно объяснить следующим образом. Состояние $|eg\rangle$ можно представить как комбинацию суперпозиционных состояний $|eg\rangle = (|S\rangle + |A\rangle) / \sqrt{2}$, каждое из которых в зависимости от k_0d может быть светлым, либо темным, но они всегда будут противоположны друг другу: $|eg\rangle = (|B\rangle + |D\rangle) / \sqrt{2}$. Половина начального возбуждения, таким образом, распадется через светлое состояние $|B\rangle$ с удвоенной скоростью 2Γ , в то время как вторая половина остается запертой в темном состоянии $|D\rangle$.

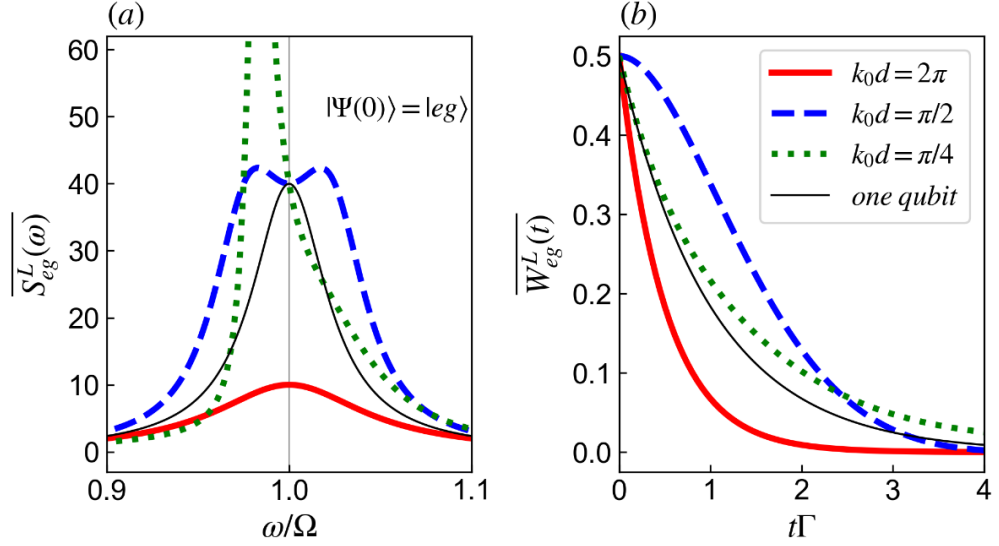


Рис. 1.6. (a) Спектры обратного излучения $\overline{S_{eg}^L(\omega)} = 2\pi \Omega S_{eg}^L(\omega)$ для первоначально возбужденного первого кубита. (b) Скорость распада в обратном направлении, $\overline{W_{eg}^L(t)} = 2\pi W_{eg}^L(t) / \Gamma$ для первоначально возбужденного первого кубита; Для сравнения однокубитный случай показан черной тонкой линией; $\Gamma/\Omega = 0,05$.

Для других значений k_0d , для которых интерференционный член не равен нулю, скорость затухания может быть такой же быстрой, как в случае сверхизлучения при $k_0d = 2\pi$. Например, для $k_0d = \pi/2$ мы получаем из (1.8.19) $W_{eg}^R(t) = 0.5\Gamma e^{-\Gamma t}(1 - \sin(\Gamma t))$ (пунктирная синяя линия на рис. 1.5b). Поэтому в сравнении с одним кубитом все графики распада на рис. 1.5b в пределах начального временного масштаба $0 < \Gamma t < 1$ можно рассматривать как сверхизлучательные. Кроме того, спектральная линия $k_0d = \pi/2$, пунктирная синяя линия на рис. 1.5a, имеет двухпиковую симметричную структуру. Расстояние между пиками является мерой когерентного обменного взаимодействия между кубитами, возникающего вследствие взаимодействия с континуумом виртуальных фотонов. В нашем случае межпиковое расстояние составляет 1,45 Г. Взяв промежуточные значения k_0d , симметрия пиков нарушается. График такой асимметричной структуры, которая может быть признаком резонанса Фано, показан на рис. 1.4a для $k_0d = \pi/4$. Также стоит отметить отсутствие прямого излучения на частоте кубита при $k_0d = \pi/2$ (пунктирная синяя линия на рис. 1.5a). В этом случае излучение распространяется слева направо, от первого, возбужденного кубита, ко второму, невозбужденному кубиту, и не проникает за второй кубит. Второй кубит на этой частоте действует как идеальное зеркало – известный эффект для одномерных систем [Shen05, Astafiev10].

Спектры излучения и скорость распада для полей, идущих влево, приведены в (1.8.20). Соответствующие графики показаны на рис. 1.6. Расстояние между пиками (пунктирная синяя линия на рис. 1.6а), которое является мерой фотонной связи между кубитами, составляет примерно 0,68 Г. Здесь также имеет место сверхизлучательный распад при $k_0 d = 2\pi$, где интерференционные члены в (1.8.20) равны нулю. В этом случае излучение в обратном направлении такое же, как и излучение в прямом. Однако для других значений $k_0 d$, для которых интерференционные члены не равны нулю, обратное излучение значительно отличается от прямого излучения, как видно из сравнения рис. 1.5 и рис. 1.6.

Если изначально возбужден второй кубит, $|\Psi(0)\rangle = |g_1 e_2\rangle$, то матрица плотности становится $\rho_S(0) = \frac{1}{2}|S + A\rangle\langle S + A|$. Это приводит к изменению знака интерференционного члена в (1.8.17), что означает, что для этого состояния спектр и скорость излучения совпадают со спектрами обратного излучения (1.8.20). Такой расклад вполне понятен, учитывая общую симметрию нашей системы. В общем виде можно записать это следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{ge}^R(\omega) &= S_{eg}^L(\omega), & S_{ge}^L(\omega) &= S_{eg}^R(\omega), \\ W_{ge}^R(t) &= W_{eg}^L(t), & W_{ge}^L(t) &= W_{eg}^R(t). \end{aligned} \quad (1.8.21)$$

Следовательно, из (1.8.18) и (1.8.20а) можно заключить, что обратный и прямой спектры излучения отличаются. Однако их сумма равна $S_S(\omega) + S_A(\omega)$ и не чувствительна к направлению, поскольку не зависит от интерференционного члена. Скорости эмиссии (1.8.19) и (1.8.20b), то есть скорости потери энергии, также различны для разных направлений движения излучения. Это говорит о том, что и вероятности излучения фотонов при спонтанном распаде кубитов отличаются для разных направлений. Однако их сумма, то есть общая скорость затухания, $W_S(t) + W_A(t)$ тоже не чувствительна к направлению.

1.8.3. Начальное состояние с двумя возбужденными кубитами

Здесь мы рассматриваем спектр начального состояния с двумя возбужденными кубитами, $|\Psi(0)\rangle = |e_1 e_2\rangle = |E\rangle$. Соответствующая матрица плотности равна $\rho_S(0) = |E\rangle\langle E|$. Из (1.8.5), (1.8.6) получаем следующий результат для спектра излучения:

$$\begin{aligned}
\left\langle a^\dagger(\omega, t) a(\omega, t) \right\rangle_E &= \frac{\Gamma_+}{\Gamma_-} \left\langle a^\dagger(\omega, t) a(\omega, t) \right\rangle_S + \frac{\Gamma_-}{\Gamma_+} \left\langle a^\dagger(\omega, t) a(\omega, t) \right\rangle_A \\
&+ \frac{\Gamma_+^2 + \Gamma_-^2}{8\pi\Gamma} \left(e^{-2\Gamma t} - 1 \right) \left[\frac{e^{-ik_0 d}}{\Gamma_+ (1 + i \sin k_0 d) (i\delta_- - \Gamma_- / 2)} - \frac{e^{ik_0 d}}{\Gamma_+ (1 - i \sin k_0 d) (i\delta_- - \Gamma_+ / 2 - \Gamma)} \right. \\
&- \frac{e^{-ik_0 d}}{\Gamma_- (1 - i \sin k_0 d) (i\delta_+ - \Gamma_+ / 2)} + \frac{e^{ik_0 d}}{\Gamma_- (1 + i \sin k_0 d) (i\delta_+ - \Gamma_- / 2 - \Gamma)} \left. \right] \\
&+ \frac{1}{4\pi\Gamma_+} \frac{e^{ik_0 d}}{(1 - i \sin k_0 d)} \frac{\left(e^{-(i\delta_- + \Gamma_- / 2)t} - 1 \right) \left(\Gamma_-^2 + \Gamma_+^2 e^{(i\delta_- - \Gamma_+ / 2 - \Gamma)t} \right)}{(i\delta_- + \Gamma_- / 2) (i\delta_- - \Gamma_+ / 2 - \Gamma)} \\
&- \frac{1}{4\pi\Gamma_-} \frac{e^{ik_0 d}}{(1 + i \sin k_0 d)} \frac{\left(e^{-(i\delta_+ + \Gamma_+ / 2)t} - 1 \right) \left(\Gamma_+^2 + \Gamma_-^2 e^{(i\delta_+ - \Gamma_- / 2 - \Gamma)t} \right)}{(i\delta_+ + \Gamma_+ / 2) (i\delta_+ - \Gamma_- / 2 - \Gamma)} \\
&+ \frac{1}{4\pi\Gamma_-} \frac{e^{-ik_0 d}}{(1 - i \sin k_0 d)} \frac{\left(e^{-(i\delta_+ + \Gamma_- / 2 + \Gamma)t} - 1 \right) \left(\Gamma_-^2 + \Gamma_+^2 e^{(i\delta_+ - \Gamma_+ / 2)t} \right)}{(i\delta_+ - \Gamma_+ / 2) (i\delta_+ + \Gamma_- / 2 + \Gamma)} \\
&- \frac{1}{4\pi\Gamma_+} \frac{e^{-ik_0 d}}{(1 + i \sin k_0 d)} \frac{\left(e^{-(i\delta_- + \Gamma_+ / 2 + \Gamma)t} - 1 \right) \left(\Gamma_+^2 + \Gamma_-^2 e^{(i\delta_- - \Gamma_- / 2)t} \right)}{(i\delta_- - \Gamma_- / 2) (i\delta_- + \Gamma_+ / 2 + \Gamma)}. \tag{1.8.22}
\end{aligned}$$

Устремляя время в (1.8.22) к бесконечности, мы получаем спектральную плотность излучения:

$$\begin{aligned}
S_E(\omega) &= \frac{\Gamma_+}{\Gamma_-} S_S(\omega) + \frac{\Gamma_-}{\Gamma_+} S_A(\omega) + \frac{\Gamma_+^2 + \Gamma_-^2}{8\pi\Gamma(1 + \sin^2 k_0 d)} \times \\
&\left[\frac{e^{ik_0 d} (1 + i \sin k_0 d)}{\Gamma_+ \left(i\delta_- - \frac{\Gamma_+}{2} - \Gamma \right)} - \frac{e^{-ik_0 d} (1 - i \sin k_0 d)}{\Gamma_+ \left(i\delta_- - \frac{\Gamma_-}{2} \right)} + \frac{e^{-ik_0 d} (1 + i \sin k_0 d)}{\Gamma_- \left(i\delta_+ - \frac{\Gamma_+}{2} \right)} - \frac{e^{ik_0 d} (1 - i \sin k_0 d)}{\Gamma_- \left(i\delta_+ - \frac{\Gamma_-}{2} - \Gamma \right)} \right] \\
&+ \frac{1}{4\pi(1 + \sin^2 k_0 d)} \times \left[\frac{\Gamma_+^2}{\Gamma_+} \frac{e^{-ik_0 d} (1 - i \sin k_0 d)}{\left(i\delta_- - \frac{\Gamma_-}{2} \right) \left(i\delta_- + \frac{\Gamma_+}{2} + \Gamma \right)} - \frac{\Gamma_-^2}{\Gamma_+} \frac{e^{ik_0 d} (1 + i \sin k_0 d)}{\left(i\delta_- + \frac{\Gamma_-}{2} \right) \left(i\delta_- - \frac{\Gamma_+}{2} - \Gamma \right)} \right. \\
&\left. + \frac{\Gamma_+^2}{\Gamma_-} \frac{e^{ik_0 d} (1 - i \sin k_0 d)}{\left(i\delta_+ + \frac{\Gamma_+}{2} \right) \left(i\delta_+ - \frac{\Gamma_-}{2} - \Gamma \right)} - \frac{\Gamma_-^2}{\Gamma_-} \frac{e^{-ik_0 d} (1 + i \sin k_0 d)}{\left(i\delta_+ - \frac{\Gamma_+}{2} \right) \left(i\delta_+ + \frac{\Gamma_-}{2} + \Gamma \right)} \right]. \tag{1.8.23}
\end{aligned}$$

Для скорости затухания из (1.8.22) получаем:

$$W_E(t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma_+^2}{\Gamma_-} e^{-\Gamma_+ t} + \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma_-^2}{\Gamma_+} e^{-\Gamma_- t} - \frac{2\Gamma \cos^2 k_0 d}{\pi(1 - \cos^2 k_0 d)} e^{-2\Gamma t}. \tag{1.8.24}$$

Для двух первоначально возбужденных кубитов нет разницы между прямым и обратным спектрами излучения, $\langle a^\dagger a \rangle = \langle b^\dagger b \rangle$.

Как может показаться на первый взгляд, выражения (1.8.22-1.8.24) могут принимать бесконечные значения при $k_0 d = n\pi$ из-за ширины линий Γ_- , Γ_+ в знаменателе. Однако внимательное рассмотрение этих выражений показывает, что в этих точках числитель также обращается в ноль. Как и раньше, мы можем получить правильное решение, если подставим $k_0 d = n\pi$ непосредственно в уравнения (1.6.4) и (1.6.5) или разложив $\cos(k_0 d)$ в окрестности точки $k_0 d = n\pi$ в (1.8.22-1.8.24). Например, для $k_0 d = 2\pi$ находим:

$$\begin{aligned} \left\langle a^\dagger(\omega, t) a(\omega, t) \right\rangle_E \Big|_{2\pi} &= \frac{\Gamma}{\pi} \frac{\left(e^{-(i\delta+\Gamma)t} - 1 \right) \left(e^{(i\delta-\Gamma)t} - 1 \right)}{\delta^2 + \Gamma^2} + \frac{\Gamma^3}{2\pi i \delta (i\delta - \Gamma)^2 (i\delta - 2\Gamma)} + \frac{\Gamma e^{-2\Gamma t}}{2\pi (i\delta - \Gamma)^2} \\ &\quad - \frac{2\Gamma^2}{2\pi (i\delta - \Gamma)^2} \frac{e^{-(i\delta+\Gamma)t} - 1}{(i\delta + \Gamma)} + \frac{2\Gamma^2}{2\pi (i\delta - \Gamma)} \frac{e^{(i\delta-\Gamma)t} - e^{-2\Gamma t}}{(i\delta + \Gamma)^2} \\ &\quad - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{e^{-(i\delta+2\Gamma)t} - 1}{i\delta (i\delta + 2\Gamma)} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{e^{(i\delta-2\Gamma)t}}{i\delta (i\delta - 2\Gamma)} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{e^{-2\Gamma t}}{\delta^2 + \Gamma^2} 2\Gamma t, \end{aligned} \quad (1.8.25)$$

$$S_E(\omega) \Big|_{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \frac{6\Gamma(\delta^2 + 2\Gamma^2)}{(\delta^2 + \Gamma^2)(\delta^2 + 4\Gamma^2)}, \quad (1.8.26)$$

$$W_E(t) \Big|_{2\pi} = \frac{\Gamma}{2\pi} (1 + 2\Gamma t) e^{-2\Gamma t}. \quad (1.8.27)$$

Для этого случая спектр излучения для нескольких значений $k_0 d$ показан на рис. 1.7а. При $k_0 d = n\pi$, где n — любое целое число, мы получаем однопиковую лоренцеву линию, хотя аналитическая функция (1.8.26) имеет более сложное выражение. Для $k_0 d = \pi/2$ имеются два пика с неглубоким разделением наверху. Здесь межпиковое расстояние составляет примерно 0,66 Γ . При $k_0 d = \pi/4$ наблюдается схожая двух-пиковая форма спектра, но со смещенной симметрией. Спектр для $d = \lambda/2$ совпадает с экспериментальными данными, полученными для двух сверхпроводящих кубитов в открытом волноводе с непрерывным когерентным возбуждением [vanLoo13].

Графики скорости затухания эмиссии для этих значений $k_0 d$ показаны на рис. 1.7б. Видно, что скорости излучения двух первоначально возбужденных кубитов заметно превышают скорость распада одного кубита, причем данный эффект сверхизлучения слабо зависит от $k_0 d$. Таким образом, вне зависимости от того, на каком расстоянии располагаются два возбужденных кубита друг относительно друга, их распад всегда происходит быстрее, чем распадался бы одиночный кубит. Данный вывод также подтверждается экспериментом [Mlynek14].

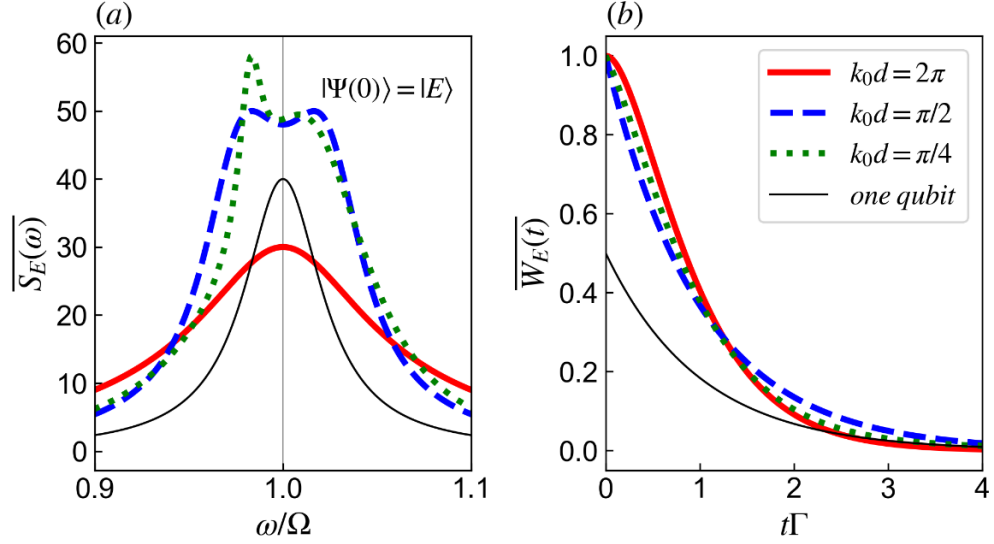


Рис. 1.7. (a) Спектры излучения $\overline{S_E(\omega)} = 2\pi \Omega S_E(\omega)$, выражение (1.8.23), для двух первоначально возбужденных кубитов (1.8.23) для разных эффективных расстояний ; (b) Скорость затухания излучения, $\overline{W_E(t)} = 2\pi W_E(t) / \Gamma$ двух возбужденных кубитов (1.8.24); $\Gamma/\Omega = 0,05$.

1.8.4. Начальное состояние в форме суперпозиции

Для систем искусственных атомов в наноструктурах можно настраивать и манипулировать состоянием каждого кубита индивидуально, поэтому общее состояние может представлять собой более сложную конструкцию из общих состояний $|e\rangle, |g\rangle$ [Blais21]. В этом разделе мы сосредоточимся на состояниях, когда хотя бы один из кубитов находится в состоянии суперпозиции. Эти состояния суперпозиции отличаются от несепарабельных состояний Белла $|S\rangle, |A\rangle$, которые мы описали в разд. 1.8.1. Здесь мы предполагаем, что каждый кубит может управляться индивидуально.

а) Первый кубит в суперпозиции, второй в основном состоянии

Возьмем следующую исходную волновую функцию:

$$|\Psi(0)\rangle = |s_1\rangle \otimes |g_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle + |g_1\rangle) \otimes |g_2\rangle = \frac{1}{2}|S\rangle - \frac{1}{2}|A\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|G\rangle. \quad (1.8.28)$$

Соответствующая начальная матрица плотности определяется выражением:

$$\begin{aligned}\rho_S(0) = & \frac{1}{4}(|S\rangle\langle S| + |A\rangle\langle A| - |S\rangle\langle A| - |A\rangle\langle S|) \\ & + \frac{1}{2\sqrt{2}}(|S\rangle\langle G| - |A\rangle\langle G| + |G\rangle\langle S| - |G\rangle\langle A|) + \frac{1}{2}|G\rangle\langle G|. \end{aligned} \quad (1.8.29)$$

Первая строка в (1.8.29) представляет собой ровно половину от матрицы плотности состояния $|eg\rangle$ (1.8.16), следовательно, мы получим тот же спектр и другие связанные параметры, аналогичные параметрам для первого возбужденного кубита (1.8.17-1.8.19), но уменьшенные по амплитуде в два раза:

$$\begin{aligned}\langle a^\dagger(\omega, t)a(\omega, t) \rangle_{s_1g_2} &= \frac{1}{2} \langle a^\dagger(\omega, t)a(\omega, t) \rangle_{eg}, \\ S_{s_1g_2}(\omega) &= \frac{1}{2} S_{eg}(\omega), \quad W_{s_1g_2}(t) = \frac{1}{2} W_{eg}(t). \end{aligned} \quad (1.8.30)$$

Вторая строка в (1.8.29), описывающая переходы в основное состояние, не дает вклада в $\langle a^\dagger a \rangle$ (выражения (1.8.5), (1.8.6)).

Таким образом, состояние, в котором первый кубит подготовлен в состоянии суперпозиции, а второй — в основном состоянии, демонстрирует спектральные свойства, идентичные показанным на рис. 1.5 и 1.6, но в меньшем масштабе. Прямое и обратное излучение также различаются и могут быть найдены с помощью (1.8.18) и (1.8.20а).

б) Первый кубит в суперпозиции, второй в возбужденном состоянии

Далее возьмем начальное состояние с одним кубитом в суперпозиции и вторым в возбужденном состоянии. Волновая функция для этого случая:

$$|\Psi(0)\rangle = |s_1\rangle \otimes |e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle + |g_1\rangle) \otimes |e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|E\rangle + \frac{1}{2}|S\rangle + \frac{1}{2}|A\rangle, \quad (1.8.31)$$

и соответствующая начальная матрица плотности:

$$\rho_S(0) = \frac{|E\rangle\langle E|}{2} + \frac{|S\rangle\langle S| + |A\rangle\langle A| + |S\rangle\langle A| + |A\rangle\langle S|}{4} + \frac{|E\rangle\langle S| + |E\rangle\langle A| + |S\rangle\langle E| + |A\rangle\langle E|}{2\sqrt{2}}. \quad (1.8.32)$$

Как и в предыдущем примере, первая строка в (1.8.32) соответствует уже рассмотренным выше начальным состояниям. Следовательно, мы можем построить спектр и скорость излучения, используя (1.8.22) и обратную величину ge (1.8.17):

$$\begin{aligned}\langle a^\dagger(\omega, t)a(\omega, t) \rangle_{s_1e_2} &= \frac{1}{2} \langle a^\dagger(\omega, t)a(\omega, t) \rangle_E + \frac{1}{2} \langle a^\dagger(\omega, t)a(\omega, t) \rangle_{ge}, \\ S_{s_1e_2}(\omega) &= \frac{1}{2} S_E(\omega) + \frac{1}{2} S_{ge}(\omega), \\ W_{s_1e_2}(t) &= \frac{1}{2} W_E(t) + \frac{1}{2} W_{ge}(t), \end{aligned} \quad (1.8.33)$$

где $\langle a^\dagger a \rangle_{ge}$, $S_{ge}(\omega)$ и $W_{ge}(t)$ можно найти с помощью (1.8.21) и других формул в разделе 1.8.2.

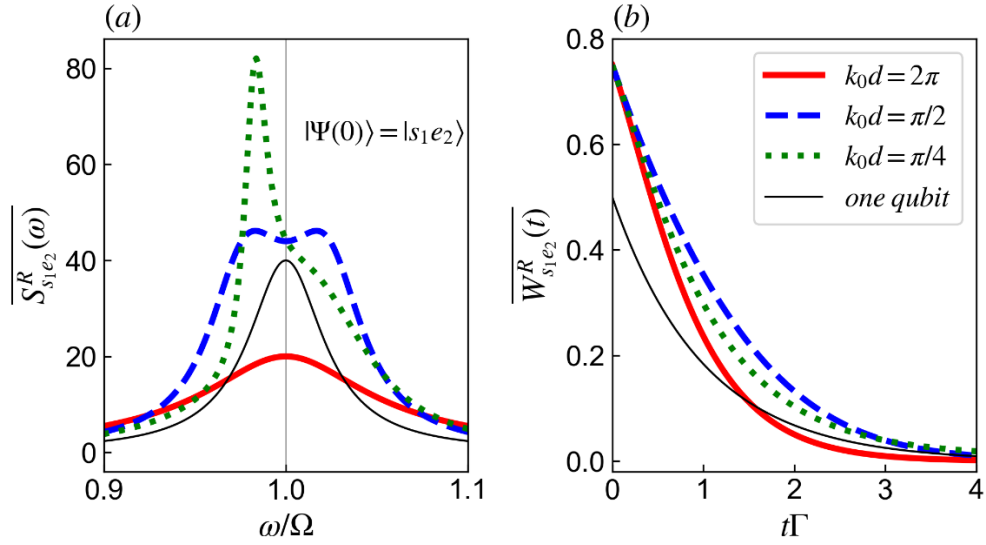


Рис. 1.8. (a) Спектры прямого излучения $\overline{S_{s_1 e_2}^R(\omega)} = 2\pi \Omega S_{s_1 e_2}^R(\omega)$ для начального состояния, когда первый кубит находится в состоянии суперпозиции, а второй находится в возбужденном состоянии при разных $k_0 d$; (b) Скорости затухания прямого излучения $\overline{W_{s_1 e_2}^R(t)} = 2\pi W_{s_1 e_2}^R(t) / \Gamma$ для того же начального состояния; Скорость распада одиночного кубита составляет $\Gamma/\Omega = 0,05$.

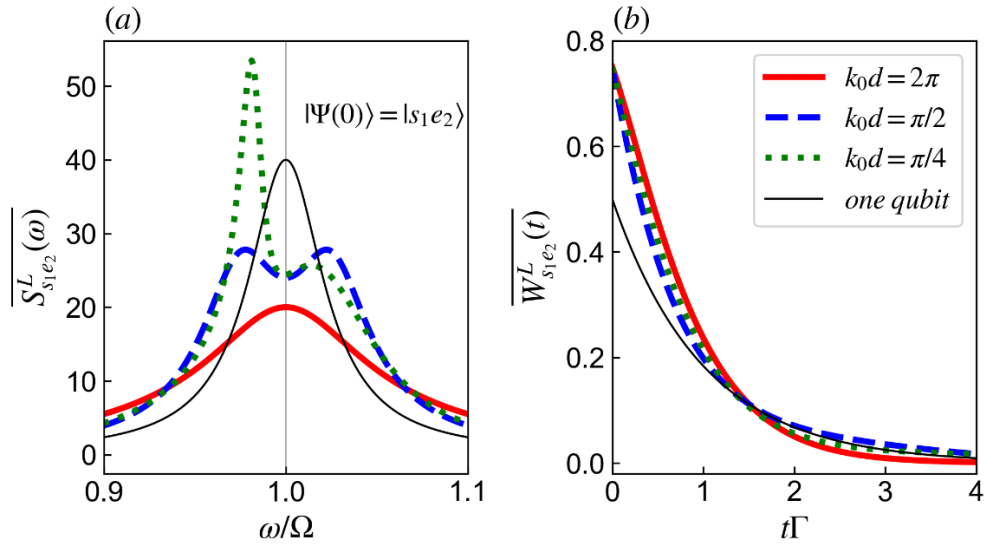


Рис. 1.9. (a) Спектры обратного излучения $\overline{S_{s_1 e_2}^L(\omega)} = 2\pi \Omega S_{s_1 e_2}^L(\omega)$ для начального состояния, когда первый кубит находится в состоянии суперпозиции, а второй находится в возбужденном состоянии при разных $k_0 d$; (b) Скорости затухания обратной эмиссии $\overline{W_{s_1 e_2}^L(t)} = 2\pi W_{s_1 e_2}^L(t) / \Gamma$ для того же начального состояния; Скорость распада одиночного кубита составляет $\Gamma/\Omega = 0,05$.

Таким образом, спектр начального состояния (1.8.31) представляет собой комбинацию спектра двух возбужденных кубитов и спектра первого возбужденного кубита. Здесь вероятности испускания фотона в левом и правом направлениях различны. Спектры прямого и обратного излучения, а также скорости распада для этого случая представлены на рис. 1.8а, 1.9а и рис. 1.8б, 1.9б соответственно. Как видно из графиков, спектры имеют очень похожую структуру на обоих концах волновода, и для некоторых значений k_0d (а именно $\pi/2$ и $\pi/4$, синяя и зеленая линии) отличаются только высотой пиков.

в) Оба кубита в состоянии суперпозиции

Наконец, рассмотрим начальное состояние, когда оба кубита подготовлены в состоянии суперпозиции:

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle + |g_1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_2\rangle + |g_2\rangle) = \frac{1}{2}|E\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S\rangle + \frac{1}{2}|G\rangle, \quad (1.8.34)$$

с начальной матрицей плотности:

$$\begin{aligned} \rho_S(0) = & \frac{|E\rangle\langle E|}{4} + \frac{|S\rangle\langle S|}{2} + \frac{|E\rangle\langle G| + |G\rangle\langle E| + |G\rangle\langle G|}{4} \\ & + \frac{1}{2\sqrt{2}}(|E\rangle\langle S| + |S\rangle\langle E| + |S\rangle\langle G| + |G\rangle\langle S|). \end{aligned} \quad (1.8.35)$$

Как следует из (1.8.5), (1.8.6), только первая строчка в (1.8.35) вносит вклад в спектр излучения, который можно представить как комбинацию состояний с двумя возбужденными кубитами (1.8.22-1.8.24) и с кубитами в симметричной суперпозиции (1.8.9, 1.8.11, 1.8.12):

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(\omega, t)a(\omega, t) \rangle_{s_1 s_2} &= \frac{1}{4} \langle a^\dagger(\omega, t)a(\omega, t) \rangle_E + \frac{1}{2} \langle a^\dagger(\omega, t)a(\omega, t) \rangle_S, \\ S_{s_1 s_2}(\omega) &= \frac{1}{4} S_E(\omega) + \frac{1}{2} S_S(\omega), \\ W_{s_1 s_2}(t) &= \frac{1}{4} W_E(t) + \frac{1}{2} W_S(t). \end{aligned} \quad (1.8.36)$$

В этом случае вероятности обнаружить фотон на левом или правом детекторе одинаковы. Характерные графики для этого случая представлены на рис. 1.10а, б. На рис. 1.10б мы видим, что график $k_0d = \pi/2$ накладывается на график одного кубита. Это означает, что площади соответствующих спектральных линий (рис. 1.10а) равны друг другу, хотя форма их линий различна. Другой особенностью является существование субрадиантного состояния при $k_0d = \pi$, пунктирная фиолетовая линия на рис. 1.10а, 1.10б.

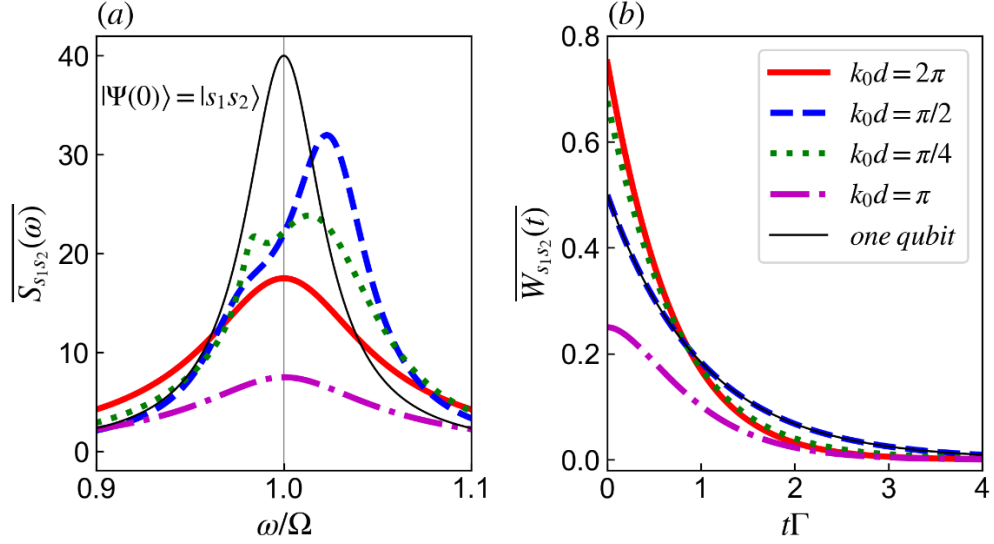


Рис. 1.10. (a) Спектры излучения $\overline{S_{s_1 s_2}(\omega)} = 2\pi \Omega S_{s_1 s_2}(\omega)$ для состояния, в котором каждый кубит изначально находится в состоянии суперпозиции; (b) Скорость затухания излучения $\overline{W_{s_1 s_2}(t)} = 2\pi W_{s_1 s_2}(t) / \Gamma$ для начального состояния суперпозиции; $\Gamma/\Omega = 0,05$.

В заключение этого подраздела отметим, что, как видно из рис. 1.8а, спектры излучения для начального состояния, когда первый кубит находится в состоянии суперпозиции, а другой — в возбужденном состоянии, крайне похожи на спектры двух возбужденных кубитов, показанных на рис. 1.7а. С другой стороны, когда оба кубита приготовлены в состоянии суперпозиции, спектр существенно меняется, и только при $k_0 d = \pi$ подобие сохраняется. Можно обратить внимание, что ширина линии обоих спектров (1.8.33) и (1.8.36) для $k_0 d = 2\pi$ одинакова. Более того, она совпадает с шириной линии спектра двух возбужденных кубитов (1.8.26) (красная линия на рис. 1.7а).

Также стоит отметить, что благодаря используемому методу оператора перехода, мы смогли рассмотреть спектры излучения и скорости распада не только для начальных состояний с одним возбуждением вроде $|S\rangle, |A\rangle$ и $|eg\rangle$, но и для состояний с двумя возбуждениями $|E\rangle, |s_1 e_2\rangle, |s_1 s_2\rangle$. Это еще раз доказывает преимущества использованного подхода из-за его независимости от конкретного начального состояния системы.

1.9. Реконструкция запутанного состояния двух кубитов

Рассмотрим возможное практическое применение для написанной выше теории, а именно определение произвольного состояния для двух кубитов в волноводе по измеренным фотонным спектрам. Допустим, у нас имеется два кубита в волноводе в произвольном запутанном состоянии, описываемом двумя значениями амплитуд вероятности p и q и одним фазовым коэффициентом φ , т.е.:

$$|\Psi_{qb}(0)\rangle = p|e_1g_2\rangle + qe^{i\varphi}|g_1e_2\rangle. \quad (1.9.1a)$$

Если раскрыть скобки и перевести эти состояния в базис Дикке (1.6.1), то получим:

$$|\Psi_{qb}(0)\rangle = \frac{p+qe^{i\varphi}}{\sqrt{2}}|S\rangle + \frac{p-qe^{i\varphi}}{\sqrt{2}}|A\rangle = S_0|S\rangle + A_0|A\rangle. \quad (1.9.1b)$$

Для упрощения записи мы ввели обозначения для двух последних амплитуд:

$$\frac{p+qe^{i\varphi}}{\sqrt{2}} = S_0, \quad \frac{p-qe^{i\varphi}}{\sqrt{2}} = A_0. \quad (1.9.2)$$

Нормировочные условия тогда будут выглядеть следующим образом:

$$p^2 + q^2 = 1, \quad |S_0|^2 + |A_0|^2 = 1. \quad (1.9.3)$$

Следует иметь в виду, что коэффициенты p и q – всегда вещественные, тогда как S_0 и A_0 могут быть комплексными. Полная начальная матрица плотности для волновой функции (1.9.1b) будет содержать 4 элемента:

$$\rho_S(0) = |S_0|^2 |S\rangle\langle S| + |A_0|^2 |A\rangle\langle A| + S_0 A_0^* |S\rangle\langle A| + A_0 S_0^* |A\rangle\langle S| \quad (1.9.4)$$

Теперь зададимся вопросом, возможно ли определить эти произвольные коэффициенты для начального состояния (1.9.1), зная значения фотонных спектров. Из предыдущих расчетов данной главы, а именно из полного выражения для спектров (1.8.5) и (1.8.6) мы можем найти:

$$\langle a^\dagger(\omega, t) a(\omega, t) \rangle = \langle a^\dagger(\omega, t) a(\omega, t) \rangle_+ + \langle a^\dagger(\omega, t) a(\omega, t) \rangle_-, \quad (1.9.5a)$$

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(\omega, t) a(\omega, t) \rangle_+ &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau' e^{-i\omega(\tau-\tau')} \times [\\ &+ (1 + \cos(k_0 d)) |S_0|^2 \langle S | \langle P_{SG}(\tau - \tau') \rangle_0 | G \rangle \langle S | \langle P_{SS}(\tau') \rangle_0 | S \rangle \\ &+ (1 - \cos(k_0 d)) |A_0|^2 \langle A | \langle P_{AG}(\tau - \tau') \rangle_0 | G \rangle \langle A | \langle P_{AA}(\tau') \rangle_0 | A \rangle \\ &+ i \sin(k_0 d) S_0 A_0^* \langle A | \langle P_{AG}(\tau - \tau') \rangle_0 | G \rangle \langle A | \langle P_{AS}(\tau') \rangle_0 | S \rangle \\ &- i \sin(k_0 d) S_0^* A_0 \langle S | \langle P_{SG}(\tau - \tau') \rangle_0 | G \rangle \langle S | \langle P_{SA}(\tau') \rangle_0 | A \rangle], \end{aligned} \quad (1.9.5b)$$

$$\begin{aligned}
\langle a^\dagger(\omega, t) a(\omega, t) \rangle_+ &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^t d\tau \int_\tau^t d\tau' e^{-i\omega(\tau-\tau')} \times [\\
&+ (1 + \cos(k_0 d)) |S_0|^2 \langle G | \langle P_{GS}(\tau' - \tau) \rangle_0 | S \rangle \langle S | \langle P_{SS}(\tau) \rangle_0 | S \rangle \\
&+ (1 - \cos(k_0 d)) |A_0|^2 \langle G | \langle P_{GA}(\tau' - \tau) \rangle_0 | A \rangle \langle A | \langle P_{AA}(\tau) \rangle_0 | A \rangle \\
&- i \sin(k_0 d) S_0^* A_0 \langle G | \langle P_{GA}(\tau' - \tau) \rangle_0 | A \rangle \langle S | \langle P_{SA}(\tau) \rangle_0 | A \rangle \\
&+ i \sin(k_0 d) S_0 A_0^* \langle G | \langle P_{GS}(\tau' - \tau) \rangle_0 | S \rangle \langle A | \langle P_{AS}(\tau) \rangle_0 | S \rangle] .
\end{aligned} \tag{1.9.5c}$$

Весь расчет аналогичен расчету спектра для состояния с одним возбужденным кубитом в разделе 1.8.2, поэтому мы не станем подробно его расписывать, а приведем лишь конечный результат:

$$\begin{aligned}
\langle a^\dagger(\omega) a(\omega) \rangle &= |S_0|^2 \frac{\Gamma_+}{4\pi} \frac{(e^{(i\delta_+ - \Gamma_+/2)t} - 1)(e^{-(i\delta_+ + \Gamma_+/2)t} - 1)}{\delta_+^2 + \Gamma_+^2/4} + |A_0|^2 \frac{\Gamma_-}{4\pi} \frac{(e^{(i\delta_- - \Gamma_-/2)t} - 1)(e^{-(i\delta_- + \Gamma_-/2)t} - 1)}{\delta_-^2 + \Gamma_-^2/4} \\
&- i S_0 A_0^* \frac{\Gamma}{4\pi} \sin(k_0 d) \frac{(e^{-(i\delta_- + \Gamma_-/2)t} - 1)(e^{(i\delta_+ - \Gamma_+/2)t} - 1)}{(i\delta_- + \Gamma_-/2)(i\delta_+ - \Gamma_+/2)} \\
&+ i S_0^* A_0 \frac{\Gamma}{4\pi} \sin(k_0 d) \frac{(e^{-(i\delta_+ + \Gamma_+/2)t} - 1)(e^{(i\delta_- - \Gamma_-/2)t} - 1)}{(i\delta_+ + \Gamma_+/2)(i\delta_- - \Gamma_-/2)} .
\end{aligned} \tag{1.9.6}$$

Удобнее перейти к пределу больших времен $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
S(\omega) &= |S_0|^2 \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma_+}{\delta_+^2 + \Gamma_+^2/4} + |A_0|^2 \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma_-}{\delta_-^2 + \Gamma_-^2/4} \\
&+ i S_0^* A_0 \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma \sin(k_0 d)}{(i\delta_+ + \Gamma_+/2)(i\delta_- - \Gamma_-/2)} - i S_0 A_0^* \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma \sin(k_0 d)}{(i\delta_- + \Gamma_-/2)(i\delta_+ - \Gamma_+/2)} .
\end{aligned} \tag{1.9.7}$$

Все дополнительные параметры, стоящие в выражении (1.9.7), даны в (1.6.8) и (1.8.10).

Мы можем привести формулу (1.9.7) к еще более удобному виду, если выбрать частоту фотонного поля в точке резонанса кубита, т.е. когда расстройка равна нулю. В таком случае получаем:

$$S(\Omega) = \frac{1}{2\pi\Gamma} (|S_0|^2 + |A_0|^2) + \frac{1}{\pi\Gamma} (S_0^* A_0 + S_0 A_0^*) . \tag{1.9.8a}$$

Поскольку в первом слагаемом содержится условие нормировки (1.9.3), то:

$$S(\Omega) = \frac{1}{\pi\Gamma} \left(\frac{1}{2} + S_0^* A_0 + S_0 A_0^* \right) . \tag{1.9.8b}$$

Подставляя сюда определения (1.9.2) и условие нормировки для p и q , легко найдем, что:

$$p^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \pi\Gamma S(\Omega), \quad q^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \pi\Gamma S(\Omega) . \tag{1.9.9}$$

Таким образом, зная значение спектра на резонансной частоте, а также скорость спонтанного излучения (которую можно экспериментально определить через ширину линии кубитного коэффициента пропускания), мы можем восстановить амплитуды вероятности начального состояния системы.

Теперь покажем, как можно определить фазу φ начального состояния (1.9.1). Для этого можно измерить спектр на частоте, слабо отличающейся от частоты резонанса. Возьмем, например, частоту $\Omega + \Gamma / 2$. В таком случае:

$$\delta_+ = \frac{\Gamma}{2}(1 - \sin k_0 d), \quad \delta_- = \frac{\Gamma}{2}(1 + \sin k_0 d). \quad (1.9.10)$$

Тогда (1.9.7) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} S\left(\Omega + \frac{\Gamma}{2}\right) &= \frac{Z_1 + Z_2}{2\pi\Gamma} + \frac{i}{2\pi\Gamma}(p^2 - q^2)(Z_3 - Z_3^*) \\ &+ \frac{pq}{\pi\Gamma}(Z_1 - Z_2)\cos\varphi + \frac{pq}{\pi\Gamma}(Z_3 + Z_3^*)\sin\varphi, \end{aligned} \quad (1.9.11)$$

где мы ввели три коэффициента, зависящих только от эффективного расстояния между кубитами $k_0 d$:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1 + \cos k_0 d}{3 + 2 \cos k_0 d - 2 \sin k_0 d}, & Z_2 &= \frac{1 - \cos k_0 d}{3 - 2 \cos k_0 d + 2 \sin k_0 d}, \\ Z_3 &= \frac{\sin k_0 d}{2i(\cos k_0 d + \sin k_0 d) - 1}. \end{aligned} \quad (1.9.12)$$

Для сверхпроводящих кубитов существует возможность настраивать частоту резонанса с помощью изменения магнитного поля [Blais21]. А от резонансной частоты кубита, в свою очередь, зависит $k_0 d = \Omega d / v_g$. Предположим, что в нашей системе мы подстроили частоты кубитов таким образом, что $k_0 d = \pi$. В таком случае $Z_1 = Z_3 = 0$, а $Z_2 = 2/5$. Следовательно, из (1.9.11) мы можем определить выражение для косинуса фазы как:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2pq} \left(1 - 5\pi\Gamma S\left(\Omega + \frac{\Gamma}{2}\right) \Big|_{\pi} \right). \quad (1.9.13)$$

Отметим, что выбор $k_0 d = \pi$ связан исключительно с желанием получить простую запись итогового выражения. Если в эксперименте нет возможности настроить $k_0 d$ именно до этого значения, то всегда можно пересчитать коэффициенты (1.9.12) исходя из реальных условий конкретной системы, получаемых на практике.

Таким образом, используя полученные нами выражения для фотонных спектров для двух кубитов в волноводе мы предложили методику, из которой можно найти исходное запутанное состояние. Зная некоторые параметры системы и проведя спектральные измерения в двух точках, возможно определить не только начальные амплитуды вероятностей двух запутанных кубитов,

но и их фазу. Данный метод можно разделить на ряд под-этапов: 1) измерение основных параметров конкретного образца, таких как резонансная частота кубитов Ω , скорость спонтанного излучения в волновод Γ , и групповая скорость фотонов в волноводе v_g ; 2) Настройка эффективного расстояния между кубитами $k_0d = \Omega d/v_g$ с помощью магнитного поля до необходимого значения, при необходимости перерасчет резонансной частоты из первого пункта для других значений магнитного поля; 3) Подготовка произвольного запутанного состояния, которое необходимо реконструировать, и измерение спектров излучения на выходе волновода, из которого нас в первую очередь интересуют точки $S(\Omega)$ и $S(\Omega + \Gamma/2)$; 4) Вычисление амплитуд и фазы реконструируемого запутанного состояния с помощью полученных выше выражений;

1.10 Выводы к Главе 1

В данной главе исследовались интерференционные эффекты, а именно сверх- и суб-излучение для спонтанной эмиссии системы из двух искусственных атомов, помещенных в одномерный открытый волновод. Было получено общее выражение, позволяющее рассчитывать спектры излучения и скорости распада для произвольной начальной конфигурации двухкубитной системы. Найдены явные аналитические выражения для различных исходных двухкубитных конфигураций с одним и двумя возбуждениями. Показано, что форма линий спектров фотонного излучения и скорость затухания, то есть скорость потери энергии, существенно зависят от эффективного расстояния между кубитами k_0d . В частности, продемонстрировано проявление сверхизлучения Дикке, для которого скорость распада кубитов увеличивается по сравнению с распадом одиночного атома, а также показано формирование долгоживущих суб-радиантных состояний. Также на основе сделанных расчетов предложен метод реконструкции произвольного запутанного состояния с помощью спектральных измерений, который является хорошим примером прикладного применения проделанных теоретических расчетов в эксперименте.

Несмотря на то, что подобного рода двух-атомные системы ранее рассматривались в литературе, наша методика расчета, основанная на операторе перехода, имеет ряд существенных преимуществ. В частности, мы смогли получить точное аналитическое решение для любого начального состояния кубитной системы, никак не ограниченное количеством возбуждений или определенным набором амплитуд вероятностей. Единственный ограничивающий фактор в данном случае связан с начальным вакуумом – наша модель предполагает, что в начальный момент времени в волноводе нет фотонных полей, а вся энергия заключена в кубитной системе.

Основной фокус работы в данном случае был на двух-кубитной системе из-за возможности непосредственного сравнения теоретических результатов с известными экспериментальными данными, которые хорошо согласуются между собой. Тем не менее, используемый формализм оператора перехода не ограничивается двух-кубитной системой и может быть распространен на большее количество атомов. Но аналитическое решение таких систем быстро становится неудобным, поскольку размеры матрицы операторов перехода растут как 2^N , хотя потенциально для этой задачи можно использовать численные либо символьные вычисления.

Мы полагаем, что результаты, полученные в этой главе, могут иметь практическое применение в квантовых информационных технологиях, включая управление и оптимизацию двух-кубитных элементов перепутывания, необходимых для реализации произвольных унитарных операций, необходимых для квантовых вычислений.

Глава 2. Динамическая теория однофотонного транспорта через цепочку кубитов в одномерном волноводе

2.1 Введение

Задачи о фотонном транспорте имеют важное фундаментальное и прикладное значение для одномерных кубитных систем. Одной из самых базовых из них является рассеяние одиночного фотона на цепочке двухуровневых атомов, встроенных в одномерный открытый волновод. Такое однофотонное рассеяние широко изучалось как теоретически [Ruostekoski17, Derouault14, Lalumiere13, Chang12], так и экспериментально [Mirhosseini19, Brehm21, vanLoo13].

Большинство теоретических расчетов амплитуд проходящих и отраженных фотонов в одномерном открытом волноводе с помещенными внутри атомами или кубитами выполнено в рамках стационарной теории в конфигурационном пространстве [Shen09, Cheng17, Fang14, Zheng13]. Но также встречаются и альтернативные методы, например, основанные на теории рассеяния Липпмана-Швингера [Roy11, Huang13, Diaz-Camacho15], формализме ввода-вывода [Fan10, Lalumiere13, Kiilerich19], неэрмитовом гамильтониане [Greenberg15] и матричных методах [Greenberg21a, Tsoi08].

Несмотря на то, что стационарная теория транспорта фотонов полезна с точки зрения примерных результатов, ожидаемых в реальном эксперименте, она не позволяет в полной мере описать динамику возбуждения кубита и эволюцию амплитуд рассеянных фотонов. Кроме того, на практике кубиты возбуждаются фотонными импульсами конечной длительности и ограниченной полосы пропускания. Поэтому для изучения эволюции переноса фотонов и атомного возбуждения в реальном времени, была разработана нестационарная динамическая теория [Chen11, Liao15, Liao16a, Liao16b].

Данная теория опирается на два основных предположения. Первое — это стандартное приближение Вигнера-Вайскопфа, согласно которому скорость спонтанного излучения в основную моду волновода намного меньше по величине, чем резонансные частоты кубитов, $\Gamma(\omega) \ll \Omega$. Поэтому скорость затухания Γ предполагается частотно-независимой и берется на резонансной частоте Ω , $\Gamma(\omega) = \Gamma(\Omega) \equiv \Gamma$. Другими словами, взаимодействие фотонных полей и кубитов имеет основной вклад на резонансных частотах.

Второе предположение носит более сложный характер. Предполагается, что кубитно-фотонная связь $g(\omega)$ может быть распространена в область отрицательных частот, что позволяет сдвинуть нижнюю границу некоторых частотных интегралов к минус бесконечности. В этом

случае амплитуды прошедшего и отраженного фотона становятся пропорциональны спектральной плотности падающего импульса $\gamma_0(\omega)$ [Liao15]. Считается, что продолжение $g(\omega)$ до отрицательных частот оправдано за пределами приближения вращающейся волны (RWA) за счет учета членов с противоположным вращением вектора поляризации (см. дополнение в работе [Gonzalez13]). Однако, поскольку чаще всего кубитные системы рассматриваются в пределе RWA, то распространение на отрицательные частоты обычно основано на предположении, что вклад от них незначителен, что не всегда так.

Кроме того, данное приближение не логично с точки зрения физического смысла: поскольку континуум начинается в точке $\omega = 0$, а плотность состояний равна нулю при $\omega < 0$, следовательно, коэффициент связи $g(\omega) = 0$ при $\omega < 0$, то есть связь не существует на отрицательных частотах [Cohen-Tannoudji04]. С другой стороны, мы можем рассматривать это продолжение как чисто математический прием – тогда он может быть оправдан, в случае если вклад от отрицательной области частот дает небольшую поправку. Это действительно так, если расстояние между кубитами d превышает длину волны кубита λ [Greenberg21b]. Однако, для систем твердотельных кубитов (особенно сверхпроводниковых) такие большие расстояния встречаются редко – при длине волны в несколько сантиметров, кубиты обычно располагаются на расстояниях от 2 см до нескольких микрон и даже меньше.

Кроме того, с чисто математической точки зрения использование при расчетах отрицательной оси частот приводит к тому, что взаимодействие между атомами в одномерной системе является чисто периодической функцией расстояния между атомами, и линейно уменьшается с уменьшением межатомного расстояния. Как следствие, если расстояние d между атомами устремить к нулю, то и взаимодействие между ними также обращается в ноль, что является физически абсурдным результатом. В нашем расчете получился более осмысленный результат, включающий в себя диполь-дипольное взаимодействие между кубитами, которое увеличивается при их сближении.

Глава организована следующим образом. В разделе 2.2 мы кратко описываем нашу систему, состоящую из N одинаковых кубитов в одномерном бесконечном волноводе. Система описывается гамильтонианом Джейнса-Каммингса в приближении вращающейся волны (RWA), а гильбертово пространство ограничено подпространством с одним возбуждением. В разделе 2.3 выводятся нестационарные уравнения для амплитуд вероятности полной волновой функции для цепочки из N одинаковых кубитов. Данные уравнения решаются в общем виде с использованием метода Гайтлера для падающего однофотонного импульса. Теоретические результаты, полученные в разделе 2.3, применяются для расчетов спектров прямого и обратного излучения фотонов при рассеянии падающего гауссова импульса на одном кубите (раздел 2.4) и на

двухкубитной системе (раздел 2.5). Показано, что форма линии спектров излучения крайне сильно зависит от расстояния между начальным положением гауссова пакета и первым кубитом в цепочке. В случае, когда это расстояние сравнимо с шириной гауссова пакета в конфигурационном пространстве, получаемые спектральные линии значительно отличаются от известных результатов. Для двух кубитов также продемонстрировано влияние диполь-дипольного взаимодействия между атомами на появление частотного сдвига в спектральных линиях. Основные выводы по проделанному расчету представлены в заключении (раздел 2.6). Некоторые дополнительные расчеты помещены в Приложении А.

2.2. Краткое описание модели

Рассмотрим систему, состоящую из N одинаковых кубитов в одномерном бесконечном волноводе, показанную на рисунке 2.1. В представлении непрерывного спектра [Blow90] эту систему можно описать гамильтонианом Джейнса-Каммингса (1.3.1), который был подробно рассмотрен в начале пункта 1.3. В отличие от предыдущей главы, здесь мы рассматриваем подпространство с одним возбуждением, в котором либо один фотон находится в волноводе и все кубиты находятся в основном состоянии, либо в волноводе нет фотонов и один из кубитов в цепочке возбужден. Поэтому мы ограничиваем гильбертово пространство до следующих состояний:

$$\begin{aligned} |G, 1_k\rangle &= |g_1, g_2, \dots, g_N\rangle \otimes |1_k\rangle; \\ |n, 0_k\rangle &= |g_1, g_2, \dots, g_{n-1}, e_n, g_{n+1}, \dots, g_N\rangle \otimes |0_k\rangle; \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Количество возбуждений для гамильтониана (1.3.1) сохраняется (количество возбужденных кубитов + количество фотонов). В нашем случае число возбуждений равно одному. Следовательно, в любой момент времени система будет оставаться внутри подпространства с одним возбуждением.

Решение задачи рассеяния в данной главе мы будем проводить в представлении Шредингера. Волновую функцию произвольного состояния с одним возбуждением можно записать как:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^N \beta_n(t) e^{-i\Omega t} |n, 0\rangle + \int_0^\infty d\omega \gamma(\omega, t) e^{-i\omega t} a^\dagger(\omega) |G, 0\rangle + \int_0^\infty d\omega \delta(\omega, t) e^{-i\omega t} b^\dagger(\omega) |G, 0\rangle, \quad (2.2.2)$$

где $\beta_n(t)$ это амплитуды вероятности для возбужденного n -го кубита, а $\gamma(\omega, t)$ и $\delta(\omega, t)$ это одно-фотонные амплитуды, которые соотносятся со спектральной плотностью прямого (идущего

слева направо) и обратного (справа налево) излучения соответственно. Для фотонных амплитуд все кубиты в цепочке находятся в основном состоянии.

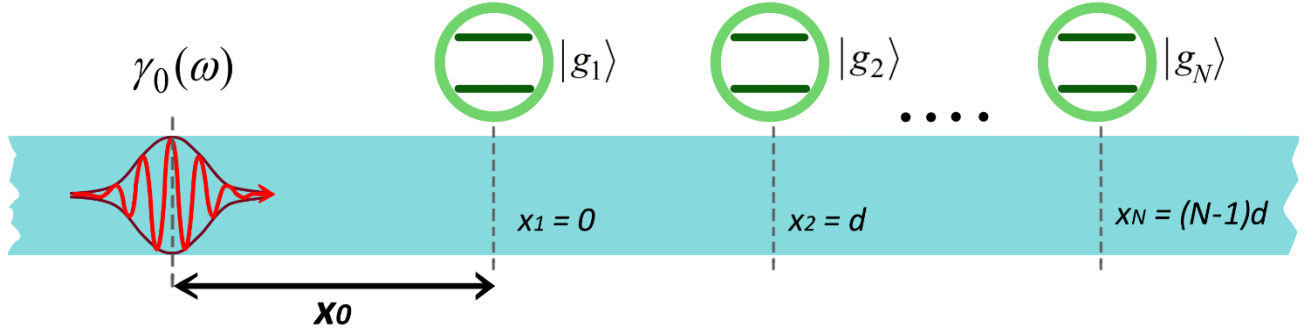


Рис. 2.1. Схематичное изображение рассматриваемой в данной главе системы – цепочки из N кубитов, находящихся в основном состоянии, на которую с расстояния x_0 падает однофотонный импульс с произвольной спектральной формой $\gamma_0(\omega)$. Расстояния между всеми кубитами предполагаются одинаковыми и равными d .

Фотонные операторы рождения и уничтожения $a^\dagger(\omega)$, $a(\omega)$, и $b^\dagger(\omega)$, $b(\omega)$ описывают поля, движущиеся в правую и левую стороны соответственно. Они независимы друг от друга и удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям для непрерывного спектра [Blow90]:

$$\left[a(\omega), a^\dagger(\omega') \right] = \left[b(\omega), b^\dagger(\omega') \right] = \delta(\omega - \omega'). \quad (2.2.3)$$

Функция (2.2.2) для любых времен нормируется на единицу:

$$\sum_{n=1}^N |\beta_n(t)|^2 + \int_0^\infty d\omega |\gamma(\omega, t)|^2 + \int_0^\infty d\omega |\delta(\omega, t)|^2 = 1. \quad (2.2.4)$$

В качестве начального состояния возьмем следующее: все кубиты находятся в основном состоянии при $t = 0$, $\beta_n(0) = 0$; волна, идущая в обратном направлении отсутствует, $\delta(\omega, 0) = 0$; волна в прямом направлении равна $\gamma(\omega, 0) \equiv \gamma_0(\omega)$, где $\gamma_0(\omega)$ — произвольный фотонный импульс, который для одиночного рассеянного фотона предполагается нормированным на единицу, $\int_0^\infty d\omega |\gamma_0(\omega)|^2 = 1$. Заметим, что при $t \rightarrow \infty$ амплитуда кубита $\beta_n(t) \rightarrow 0$, поэтому уравнение (2.2.4) сводится к:

$$\int_0^\infty d\omega |\gamma(\omega, t \rightarrow \infty)|^2 + \int_0^\infty d\omega |\delta(\omega, t \rightarrow \infty)|^2 = 1. \quad (2.2.5)$$

2.3. Уравнения для кубитных и фотонных амплитуд

Из временного уравнения Шрёдингера $id\Psi(t)/dt = H\Psi(t)$ находим уравнения движения для амплитуд:

$$\frac{d}{dt}\beta_n(t) = -i\int_0^\infty d\omega g(\omega)\gamma(\omega,t)e^{ikx_n}e^{-i(\omega-\Omega)t} - i\int_0^\infty d\omega g(\omega)\delta(\omega,t)e^{-ikx_n}e^{-i(\omega-\Omega)t}, \quad (2.3.1a)$$

$$\frac{d}{dt}\gamma(\omega,t) = -ig(\omega)e^{i(\omega-\Omega)t}\sum_{n=1}^N\beta_n(t)e^{-ikx_n}, \quad (2.3.1b)$$

$$\frac{d}{dt}\delta(\omega,t) = -ig(\omega)e^{i(\omega-\Omega)t}\sum_{n=1}^N\beta_n(t)e^{ikx_n}. \quad (2.3.1c)$$

Система уравнений (2.3.1) имеет физический смысл только для времени $t > 0$. Поэтому, следует дополнительно ввести начальные условия для амплитуд в начальный момент времени $t = 0$:

$$\beta_n(0) = 0, \quad \delta(\omega, 0) = 0, \quad \gamma(\omega, +0) = \gamma_0(\omega), \quad (2.3.2)$$

где $\gamma_0(\omega)$ это начальный импульс, как было указано в конце раздела 2.2.

Чтобы найти аналитическое решение, используем метод, впервые примененный Гайтлером [Heitler54]. Он заключается в том, чтобы продлить решение системы (2.3.1) в отрицательную область по времени, от 0 до $-\infty$. При этом амплитуды для отрицательного времени принимаются равными нулю:

$$\beta_n(t) = 0, \quad \delta(\omega, t) = 0, \quad \gamma(\omega, t) = 0, \quad t < 0 \quad (2.3.3)$$

Если рассмотреть вместе условия (2.3.3) и (2.3.2), то видно, что амплитуды $\beta_n(t)$ и $\delta(\omega, t)$ будут непрерывны по всему временному континууму, тогда как амплитуда для прямого фотонного поля $\gamma(\omega, t)$ будет иметь скачок в момент времени $t = 0$. Данный скачок можно учесть, если добавить в исходное уравнение дополнительный неоднородный член:

$$\frac{d}{dt}\gamma(\omega, t) = -ig(\omega)e^{i(\omega-\Omega)t}\sum_{n=1}^N\beta_n(t)e^{-ikx_n} + \gamma_0(\omega)\delta(t), \quad (2.3.4)$$

где $\delta(t)$ это дельта-функция Дирака. Из-за данной неоднородной добавки нормированное значение волновой функции (2.2.4) будет иметь скачок от 0 в области $t < 0$ до 1 в области $t > 0$. Однако, теперь система уравнений (2.3.1) определена для всего временного континуума, т.е. и для положительных, и для отрицательных времен.

Дальнейшее решение системы мы будем проводить с помощью перехода к фурье-образам от временных амплитуд. Определим преобразование Фурье, прямое и обратное, для всех трех искоемых амплитуд как:

$$\beta_n(\nu) = \int_0^{\infty} dt \beta_n(t) e^{i(\nu-\Omega)t}, \quad \beta_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi} \beta_n(\nu) e^{-i(\nu-\Omega)t}, \quad (2.3.5a)$$

$$\gamma(\omega, \nu) = \int_0^{\infty} dt \gamma(\omega, t) e^{i(\nu-\omega)t}, \quad \gamma(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi} \gamma(\omega, \nu) e^{-i(\nu-\omega)t}, \quad (2.3.5b)$$

$$\delta(\omega, \nu) = \int_0^{\infty} dt \delta(\omega, t) e^{i(\nu-\omega)t}, \quad \delta(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi} \delta(\omega, \nu) e^{-i(\nu-\omega)t}. \quad (2.3.5c)$$

Далее, мы умножаем уравнение (2.3.1a) на $e^{i(\nu-\Omega)t}$ и интегрируем по t . Тогда, используя (2.3.5), мы получаем:

$$-i(\nu - \Omega)\beta_n(\nu) = -i \int_0^{\infty} d\omega g(\omega) \gamma(\omega, \nu) e^{ikx_n} - i \int_0^{\infty} d\omega g(\omega) \delta(\omega, \nu) e^{-ikx_n}. \quad (2.3.6)$$

Аналогично, умножая (2.3.1b) и (2.3.1c) на $e^{i(\nu-\omega)t}$ и интегрируя по t получаем:

$$-\gamma_0(\omega) - i(\nu - \omega)\gamma(\omega, \nu) = -ig(\omega) \sum_{n=1}^N \beta_n(\nu) e^{-ikx_n}, \quad (2.3.7a)$$

$$-i(\nu - \omega)\delta(\omega, \nu) = -ig(\omega) \sum_{n=1}^N \beta_n(\nu) e^{ikx_n}. \quad (2.3.7b)$$

Поскольку обе частотные переменные ω и ν принадлежат одному континууму, мы будем решать уравнения (2.3.7) используя общий подход, впервые разработанный в работах Гайтлера и подробно рассмотренный в [Heitler54], и впоследствии использованный для изучения рассеяния света плотным ансамблем атомов [Sokolov11, Kuraptsev15, Kuraptsev16]:

$$\gamma(\omega, \nu) = g(\omega) \sum_{n=1}^N \beta_n(\nu) e^{-ikx_n} \zeta(\nu - \omega) + i\gamma_0(\omega) \zeta(\nu - \omega), \quad (2.3.8a)$$

$$\delta(\omega, \nu) = g(\omega) \sum_{n=1}^N \beta_n(\nu) e^{ikx_n} \zeta(\nu - \omega), \quad (2.3.8b)$$

где введена сингулярная дзета-функция, определяемая как:

$$\zeta(\nu - \omega) = -i\pi\delta(\nu - \omega) + P \frac{1}{\nu - \omega}. \quad (2.3.9)$$

В (2.3.9), $\delta(\nu - \omega)$ это дельта-функция Дирака, а P это главное значение Коши.

Далее подставим выражения (2.3.8) в (2.3.6) и получим систему линейных уравнений, определяющих фурье-компоненты кубитных амплитуд $\beta_n(\nu)$:

$$\begin{aligned} \left(\nu - \Omega - 2 \int_0^\infty d\omega g^2(\omega) \zeta(\nu - \omega) \right) \beta_n(\nu) - 2 \sum_{n' \neq n}^N \beta_{n'}(\nu) \int_0^\infty d\omega g^2(\omega) \cos(k(x_n - x_{n'})) \zeta(\nu - \omega) \\ = i \int_0^\infty d\omega g(\omega) \gamma_0(\omega) e^{ikx_n} \zeta(\nu - \omega). \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Используя определение дзета-функции (2.3.9) в (2.3.10), получим:

$$\begin{aligned} \left(\nu - \Omega - F(\nu) + i \frac{\Gamma(\nu)}{2} \right) \beta_n(\nu) + i \frac{\Gamma(\nu)}{2} \sum_{n' \neq n}^N \beta_{n'}(\nu) \left(e^{ik_\nu |x_n - x_{n'}|} + i G k_\nu (x_n - x_{n'}) \right) \\ = i \int_0^\infty d\omega g(\omega) \gamma_0(\omega) e^{ikx_n} \zeta(\nu - \omega), \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

где появляется следующий коэффициент (смотри его вывод в приложении A1):

$$\begin{aligned} G(k_\nu d_{nn'}) = - \frac{4}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty d\omega \frac{g^2(\omega) \cos k_\nu d_{nn'}}{\omega + \nu} \\ = \frac{1}{\pi} \cos k_\nu d_{nn'} Ci(|k_\nu d_{nn'}|) + \frac{1}{\pi} \sin k_\nu d_{nn'} \left(-\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(d_{nn'}) + Si(k_\nu d_{nn'}) \right). \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Здесь мы также ввели следующие обозначения: расстояние между кубитами $d_{nn'} = x_n - x_{n'}$, скорость спонтанного излучения $\Gamma(\nu) = 4\pi g^2(\nu)$, частотный сдвиг $F(\nu) = 2P \int_0^\infty d\omega g^2(\omega) / (\nu - \omega)$, волновые числа $k_\nu = \nu / v_g$, $k = \omega / v_g$; $Ci(x)$ и $Si(x)$ это интегральные косинус и синус:

$$Ci(x) = - \int_x^\infty dt \frac{\cos t}{t}, \quad Si(x) = \int_0^x dt \frac{\sin t}{t}. \quad (2.3.13)$$

Поскольку $Ci(x)$ определена для $x > 0$ и $Si(-x) = -Si(x)$, величина $G(x)$ является четной функцией, $G(-x) = G(x)$.

Так как величина $G(kd_{nn'})$ является вещественной функцией, она изменяет взаимодействие между кубитами, приводя к сдвигу их резонансных частот. Кроме того, данный коэффициент сильно зависит от межкубитного расстояния $d_{nn'}$, и может рассматриваться как диполь-дипольное взаимодействие между кубитами. Мы подробно рассмотрим этот коэффициент и его свойства в разделе 2.5.2 на более простом примере двухкубитной системы.

Из системы линейных уравнений (2.3.11) можно найти N значений для фурье-образов амплитуд $\beta_n(\nu)$. Следующий шаг – найти с помощью (2.3.8) фурье-образы амплитуд фотонов

$\gamma(\omega, \nu)$ и $\delta(\omega, \nu)$. Наконец, используя преобразования Фурье (2.3.5) мы можем найти амплитуды кубитов и фотонов во временной области.

Однако, учитывая, что нас в первую очередь интересуют амплитуды рассеяния в случае $t \rightarrow \infty$, более простым видом решения представляется найти их непосредственно из формального решения (2.3.1с) и (2.3.4):

$$\gamma(\omega, t) = \gamma_0(\omega) - i \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^t d\tau \beta_n(\tau) g(\omega) e^{i(\omega - \Omega)\tau} e^{-ikx_n}, \quad (2.3.14a)$$

$$\delta(\omega, t) = -i \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^t d\tau \beta_n(\tau) g(\omega) e^{i(\omega - \Omega)\tau} e^{ikx_n}. \quad (2.3.14b)$$

Если выставить верхний предел интегралов $t = +\infty$, то мы получим:

$$\gamma(\omega, t \rightarrow \infty) = \gamma_0(\omega) - ig(\omega) \sum_{n=1}^N \beta_n(\omega) e^{-ikx_n}, \quad (2.3.15a)$$

$$\delta(\omega, t \rightarrow \infty) = -ig(\omega) \sum_{n=1}^N \beta_n(\omega) e^{ikx_n}, \quad (2.3.15b)$$

где $\beta_n(\omega)$ это решение уравнения (2.3.11).

Ниже мы покажем применение этого метода к случаям одного и двух кубитов в волноводе, для которых аналитические решения могут быть получены в замкнутом виде.

2.4. Одиночный кубит

Для одного двухуровневого атома, расположенного в точке $x = 0$, решение уравнения (2.3.11) имеет вид:

$$\beta(\omega) = \frac{i \int_0^{\infty} d\omega' g(\omega') \gamma_0(\omega') \zeta(\omega - \omega')}{\left(\omega - \Omega - F(\omega) + i \frac{\Gamma(\omega)}{2} \right)}. \quad (2.4.1)$$

С помощью (2.3.15) вычисляем амплитуды прошедших и отраженных фотонов $\gamma(\omega, t \rightarrow \infty)$ и $\delta(\omega, t \rightarrow \infty)$:

$$\gamma(\omega, t \rightarrow \infty) = \gamma_0(\omega) \frac{\omega - \Omega - F(\omega) + i \frac{\Gamma(\omega)}{4}}{\omega - \Omega - F(\omega) + i \frac{\Gamma(\omega)}{2}} + \frac{g(\omega) P \int_0^\infty \frac{d\omega' g(\omega') \gamma_0(\omega')}{\omega - \omega'}}{\omega - \Omega - F(\omega) + i \frac{\Gamma(\omega)}{2}}, \quad (2.4.2a)$$

$$\delta(\omega, t \rightarrow \infty) = \gamma_0(\omega) \frac{-i \frac{\Gamma(\omega)}{4}}{\omega - \Omega - F(\omega) + i \frac{\Gamma(\omega)}{2}} + \frac{g(\omega) P \int_0^\infty \frac{d\omega' g(\omega') \gamma_0(\omega')}{\omega - \omega'}}{\omega - \Omega - F(\omega) + i \frac{\Gamma(\omega)}{2}}. \quad (2.4.2b)$$

Как видно, $\gamma(\omega, t \rightarrow \infty) - \delta(\omega, t \rightarrow \infty) = \gamma_0(\omega)$ — условие, справедливое только для рассеяния на одном кубите. Сохранение потока выполняется не на одной частоте, а как целая величина: (см. условие нормировки (2.2.4)).

Следует заметить, что второй член в (2.4.2), содержащий главное значение интегралов, приводит к появлению зависимости спектров рассеяния от расстояния между начальным положением гауссова импульса до первого кубита в цепочке. Также отметим, что вывод прошедшей и отраженной амплитуд (2.4.2a) и (2.4.2b) не ограничивается приближением Вигнера-Вайскопфа $\Gamma(\Omega) \ll \Omega$. Эти выражения справедливы и для сверхсильной связи, когда $\Gamma(\Omega) \leq \Omega$.

Эволюция кубитной амплитуды $\beta(t)$ может быть найдена через фурье-преобразование (2.3.5a) от найденного значения $\beta(\omega)$ из (2.4.1):

$$\beta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{i \int_0^\infty d\omega' g(\omega') \gamma_0(\omega') \zeta(\omega - \omega')}{\omega - \Omega - F(\omega) + i \frac{\Gamma(\omega)}{2}} e^{-i(\omega - \Omega)t}. \quad (2.4.3)$$

В приближении Вигнера-Вайскопфа получаем простое аналитическое выражение для эволюции амплитуды кубита (2.4.3) (см. Приложение A2):

$$\beta(t) = \int_0^\infty d\omega g(\omega) \gamma_0(\omega) \frac{e^{\frac{\Gamma}{2}t} - e^{-i(\omega - \Omega)t}}{\left(\omega - \Omega + i \frac{\Gamma}{2} \right)}. \quad (2.4.4)$$

Выражения (2.4.2) сильно отличаются от известных выражений для прошедшей и отраженной амплитуд, которые были найдены в рамках подхода стационарного рассеяния для монохроматического сигнала, рассеянного двухуровневым атомом в одномерном открытом волноводе [Shen05a, Shen05b]:

$$\gamma(\omega) = \frac{\omega - \Omega}{\omega - \Omega + i \frac{\Gamma}{2}}, \quad \delta(\omega) = \frac{-i \frac{\Gamma}{2}}{\omega - \Omega + i \frac{\Gamma}{2}}. \quad (2.4.5)$$

Ниже мы покажем, что в некоторых приближенных случаях наши выражения (2.4.2) совпадают с результатами (2.4.5), полученными для стационарного рассеяния.

Предположим, что падающий волновой пакет представляет собой узкий импульс, который можно аппроксимировать дельта-функцией:

$$\gamma_0(\omega) = A\delta(\omega - \omega_S) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{i\lambda(\omega - \omega_S)}. \quad (2.4.6)$$

Подставляя (2.4.6) в (2.4.2a) и (2.4.2b), получаем для главного значения интеграла:

$$\begin{aligned} P \int_0^{\infty} d\omega' \frac{g(\omega')\gamma_0(\omega')}{\omega - \omega'} &\approx g(\omega) \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-i\lambda\omega_S} P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{e^{i\lambda\omega'}}{\omega - \omega'} \\ &= -i\pi g(\omega) \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-i\lambda\omega_S} e^{i\lambda\omega} = -i\pi g(\omega) A\delta(\omega - \omega_S) \equiv -i\pi g(\omega)\gamma_0(\omega). \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

При выводе (2.4.7) мы, во-первых, предполагаем, что связь $g(\omega)$ является медленной функцией от ω , поэтому можем вынести ее из-под интеграла. Во-вторых, мы используем отрицательную ось частот – продлеваем нижнюю границу интеграла до минус бесконечности, что позволяет применить соотношение Крамерса-Кронига $P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda\omega'}}{\omega - \omega'} d\omega' = -i\pi e^{i\lambda\omega}$.

Если мы воспользуемся результатом (2.4.7) в (2.4.2), и предположим, что атом изначально не возбужден, мы получим для амплитуд прохождения и отражения выражения, известные из стационарной теории:

$$\gamma(\omega, t \rightarrow \infty) = \gamma_0(\omega) \frac{\omega - \Omega - F(\omega)}{\omega - \Omega - F(\omega) + i \frac{\Gamma(\omega)}{2}}, \quad (2.4.8a)$$

$$\delta(\omega, t \rightarrow \infty) = \gamma_0(\omega) \frac{-i \frac{\Gamma(\omega)}{2}}{\omega - \Omega - F(\omega) + i \frac{\Gamma(\omega)}{2}}. \quad (2.4.8b)$$

Эти выражения аналогичны тем, которые были получены в рамках нестационарного подхода в [Liao15], где $\gamma_0(\omega)$ имеет произвольную форму импульса. Однако в нашем случае выражения (2.4.8) справедливы, только если падающий фотон представляет собой дельта-импульс (2.4.6). Кроме того, при их выводе мы продлевали ось частот в отрицательную область. Тогда эти выражения являются точными асимптотическими решениями для нестационарного рассеяния

однофотонного импульса на двухуровневом атоме [Greenberg23]. Для произвольной формы $\gamma_0(\omega)$ необходимо использовать точные выражения (2.4.2a) и (2.4.2b).

Ниже представлены некоторые графики для квадрата амплитуды кубита, а также прямого и обратного спектров фотонов, рассчитанных по выражениям (2.4.4), (2.4.2) для падающего гауссова импульса в виде:

$$\gamma_0(\omega) = \left(\frac{2}{\pi \Delta^2} \right)^{1/4} \exp \left[i(\omega - \omega_S)t_0 - \frac{(\omega - \omega_S)^2}{\Delta^2} \right], \quad (2.4.9)$$

где Δ это ширина импульса в частотной области, $t_0 = x_0/v_g$ это время, которое требуется, чтобы центр гауссова пакета прошел из точки x_0 до точки $x = 0$, где расположен кубит. Наши расчеты сделаны для следующих параметров системы: $v_g = 3 \times 10^8 \text{ м/с}$, $\Omega/2\pi = 5 \text{ ГГц}$, $\Delta/\Omega = 0,1$, ширина гауссова пакета в пространстве $\Delta x = v_g / \Delta \approx 10 \text{ см}$.

Мы предполагаем, что в начальный момент времени $t = 0$ кубит находится в основном состоянии, а максимум гауссова импульса расположен на расстоянии x_0 от кубита. Графики вероятности возбуждения кубита $|\beta|^2$ показаны на рис. 2.2 для $\Delta/\Omega = 0,1$ и скорости затухания $\gamma = \Gamma/\Omega = 0,05$. Наши расчеты показывают, что максимальная вероятность возбуждения (в нашем случае 0,38) получается, если импульс в начальный момент расположен далеко от кубита по сравнению со своей шириной, $x_0 \gg \Delta_x$. Схожий результат ($|\beta_{\max}|^2 = 0,4$) был получен в работе [Chen11] для гауссова импульса на расстоянии $10 v_g / \Gamma$ от кубита.

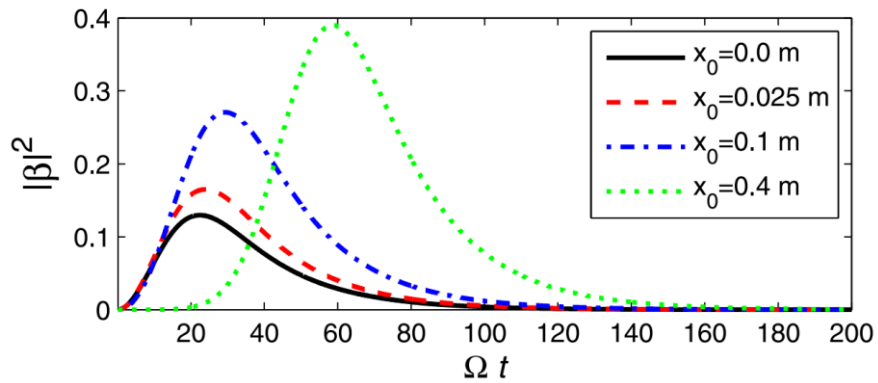


Рис. 2.2. Вероятность возбуждения кубита, рассчитанная из (2.4.4) для разных расстояний x_0 от центра гауссова импульса до кубита. Параметры системы: $\Delta/\Omega = 0,1$; $\Gamma/\Omega = 0,1$; $\omega_S/\Omega = 1$.

Как известно, максимальная вероятность возбуждения $|\beta_{\max}|^2 = 0,5$ достигается, когда кубит облучается с одного конца стационарной плоской волной [Chen11]. Причина этого в том, что гамильтониан взаимодействия кубита с полем разрешает переходы из обычных полевых

состояний для прямого и обратного фотонов в так называемые светлое (bright) и темное (dark) состояния, задаваемые как $B^\dagger = (a^\dagger + b^\dagger) / \sqrt{2}$, $D^\dagger = (a^\dagger - b^\dagger) / \sqrt{2}$ [Shen07a]. Темное состояние не взаимодействует с кубитом, из-за чего 50% падающей волны $a^\dagger = (B^\dagger + D^\dagger) / \sqrt{2}$ проходит через волновод без изменений. Компонента же, соответствующая светлому состоянию, рассеивается на кубите и обеспечивает 50% максимальной вероятности возбуждения. Полная инверсия населенности $|\beta|^2 = 1$ может быть получена с помощью падающего импульса специальной формы [Stobinska09, Rephaeli10].

Перепишем (2.4.2) в приближении Вигнера-Вайскопфа, $\Gamma(\omega) = \Gamma(\Omega) \equiv \Gamma$, $g(\omega) = g(\Omega) = (\Gamma / 4\pi)^{1/2}$. Частотный сдвиг $F(\omega) = F(\Omega)$ в случае с одним кубитом может быть включен в резонансную частоту. Таким образом получим:

$$\gamma_{WW}(\omega) = \gamma_0(\omega) \frac{\omega - \Omega + i\frac{\Gamma}{4}}{\omega - \Omega + i\frac{\Gamma}{2}} + \frac{\frac{\Gamma}{4\pi} P \int_0^\infty \frac{d\omega' \gamma_0(\omega')}{\omega - \omega'}}{\omega - \Omega + i\frac{\Gamma}{2}}, \quad (2.4.10a)$$

$$\delta_{WW}(\omega) = \gamma_0(\omega) \frac{-i\frac{\Gamma}{4}}{\omega - \Omega + i\frac{\Gamma}{2}} + \frac{\frac{\Gamma}{4\pi} P \int_0^\infty \frac{d\omega' \gamma_0(\omega')}{\omega - \omega'}}{\omega - \Omega + i\frac{\Gamma}{2}}. \quad (2.4.10b)$$

Выражения (2.4.10) дают значения спектров прохождения и отражения для падающего на один кубит фотонного импульса, полученные только для физической (положительной) оси частот. Далее мы сравниваем эти выражения с результатами, полученными в рамках нестационарной модели [Liao15] для произвольной формы импульса и с распространением коэффициента связи в область отрицательных частот:

$$\gamma(\omega) = \gamma_0(\omega) \frac{\omega - \Omega}{\omega - \Omega + i\frac{\Gamma}{2}}, \quad (2.4.11a)$$

$$\delta(\omega) = \gamma_0(\omega) \frac{-i\frac{\Gamma}{2}}{\omega - \Omega + i\frac{\Gamma}{2}}. \quad (2.4.11b)$$

Еще раз отметим, что в случае приближенного решения (2.4.11) для гауссова импульса (2.4.9) непосредственно спектры $|\gamma(\omega)|^2, |\delta(\omega)|^2$ никак не будут зависеть от расстояния x_0 между начальным положением импульса и кубитом, в отличие от точных результатов (2.4.10).

Ниже на рисунках 2.3 и 2.4 мы строим спектр в прямом направлении, $S_1(\omega) = |\gamma_{WW}(\omega)|^2 \Omega$, и в обратном направлении, $S_2(\omega) = |\delta_{WW}(\omega)|^2 \Omega$, рассчитанные из точных выражений (2.4.10). Эти спектры мы систематически сравниваем с известными результатами нестационарной модели, найденными из (2.4.11a), $S_3(\omega) = |\gamma(\omega)|^2 \Omega$, и (2.4.11b), $S_4(\omega) = |\delta(\omega)|^2 \Omega$.

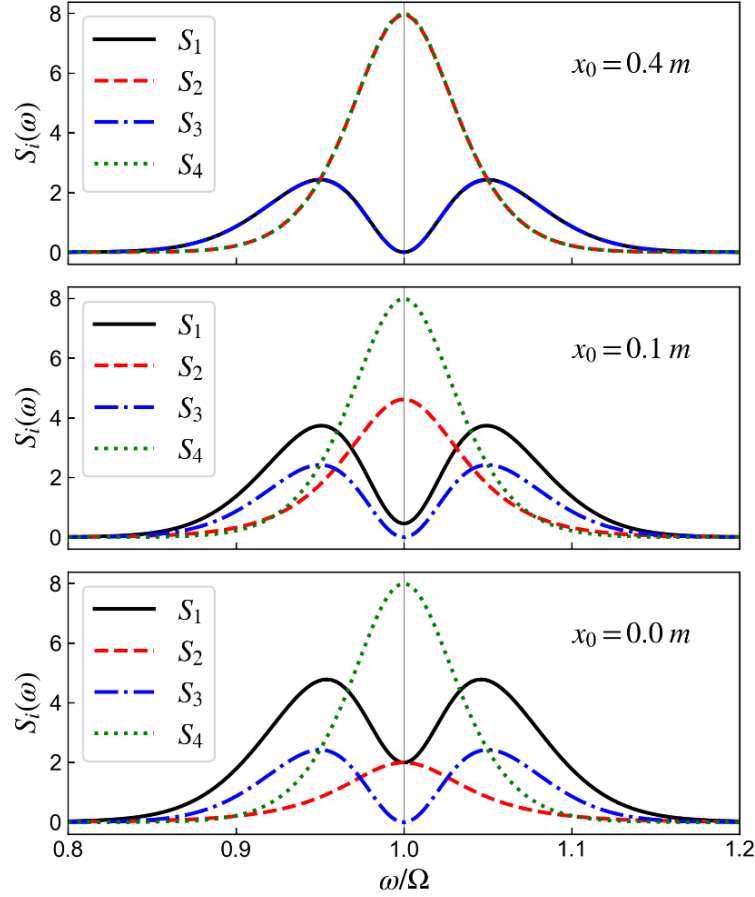


Рис. 2.3. Фотонный спектр рассеяния гауссова импульса на одиночном кубите для разных расстояний x_0 между начальным положением импульса и кубитом. На этих и всех остальных графиках сравниваются спектры прошедшей и отраженной волн для точного решения (2.4.10) и приближенного решения в рамках нестационарной модели (2.4.11). Прошедший спектр из точных выражений $S_1(\omega) = |\gamma_{WW}(\omega)|^2 \Omega$ – сплошная черная линия; отраженный спектр для точного решения $S_2(\omega) = |\delta_{WW}(\omega)|^2 \Omega$ – красная пунктирная линия; прошедший спектр из приближенного расчета $S_3(\omega) = |\gamma(\omega)|^2 \Omega$ – штрих-пунктирная синяя линия, отраженный спектр приближенного решения $S_4(\omega) = |\delta(\omega)|^2 \Omega$ – точечная зеленая линия. Параметры кубита и начального импульса, использованные в расчете: $\omega_S/\Omega = 1$; $\Gamma/\Omega = 0,1$; $\Delta/\Omega = 0,1$.

Рассмотрим, как фотонные спектры зависят от начального положения центра гауссова пакета до кубита x_0 . Соответствующие графики приведены на рис. 2.3 в случае резонансного возбуждения $\omega_s = \Omega$, и в случае с небольшой расстройкой на рис. 2.4, $\omega_s/\Omega = 1,05$ и $\omega_s/\Omega = 0,95$. Для относительно больших расстояний, $x_0 = 0,4 \text{ м} \gg \Delta x$, точные выражения (2.4.10) дают тот же самый результат, что и приближенное решение (2.4.11). Однако, если в начальный момент времени гауссов импульс рождается вблизи кубита, его переднее крыло начинает задевать кубит и тем самым появляется дополнительное взаимодействие. Таким образом, спектральные линии начинают все сильнее и сильнее отклоняться от своих первоначальных значений при сближении импульса и кубита. Случай для генерации импульса вплотную к кубиту $x_0 = 0$ представлен на нижних графиках на рис.2.3-2.4. Еще раз отметим, что на всех этих графиках приближенные величины $S_3(\omega) = |\gamma(\omega)|^2 \Omega$ и $S_4(\omega) = |\delta(\omega)|^2 \Omega$, полученные из (2.4.11), в принципе не зависят от расстояния между начальным положением импульса и кубитом.

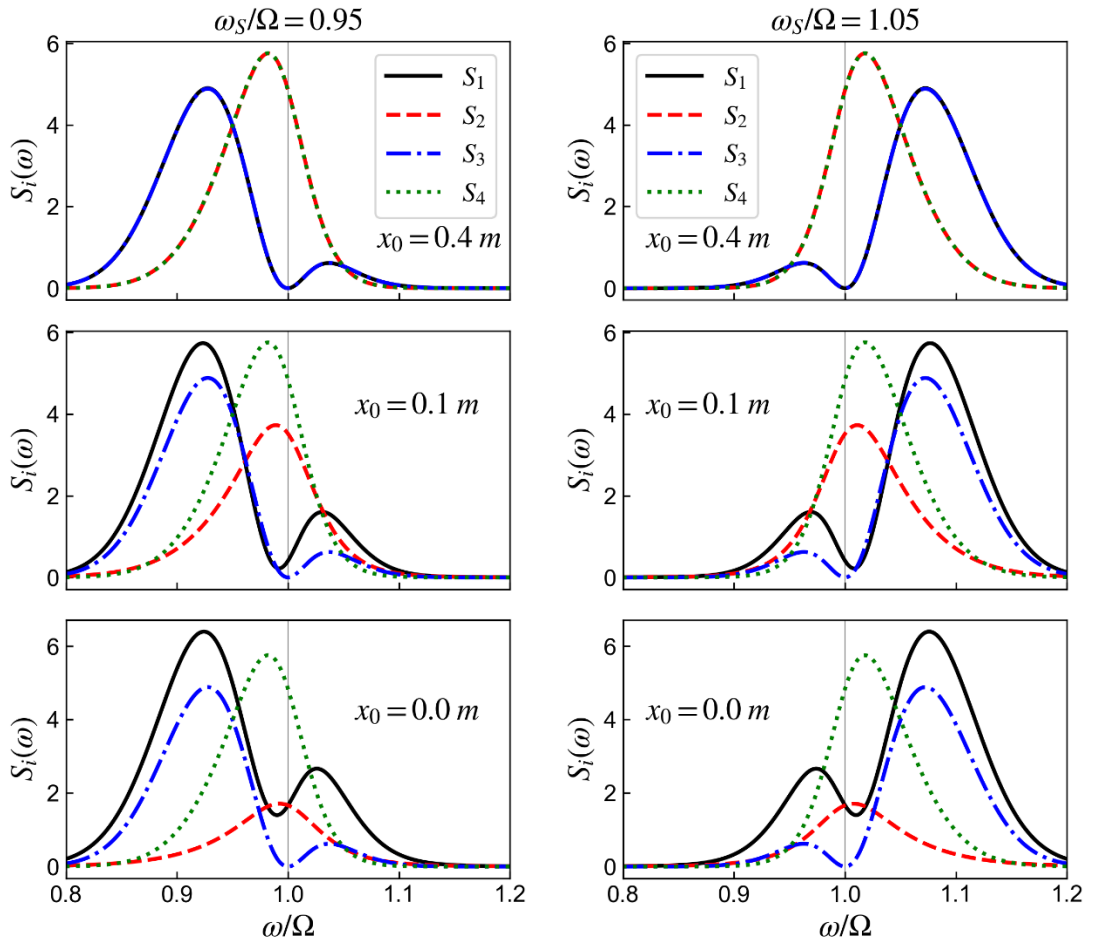


Рис. 2.4. Спектры фотонного излучения при небольшой отстройке частоты падающего импульса от резонанса: (а) $\omega_s/\Omega = 0,95$; (б) $\omega_s/\Omega = 1,05$; Все обозначения аналогичны приведенным в рис. 2.3. Параметры кубита и начального импульса, использованные в расчете: $\Gamma/\Omega = 0,1$; $\Delta/\Omega = 0,1$.

Уравнения (2.4.11) обеспечивают сохранение потока на каждой частоте: $|\gamma(\omega)|^2 + |\delta(\omega)|^2 = |\gamma_0(\omega)|^2$. Однако это простое условие не выполняется для точных уравнений (2.4.10), где условие нормировки имеет интегральный вид (2.2.5). Для каждого графика на рисунках 2.3-2.4 мы рассчитывали нормированную величину $I = \int d\omega |\gamma_{WW}(\omega)|^2 + \int d\omega |\delta_{WW}(\omega)|^2$, где интегрирование выполнялось в пределах частотного диапазона, указанного на графиках. Во всех случаях I отличалось от единицы менее чем на процент.

Основное различие между графиками, построенными по уравнениям (2.4.10) и графиками для уравнений (2.4.11) заключается в том, что коэффициент пропускания $|\gamma_{WW}(\omega)|^2$ не всегда равен нулю на резонансной частоте $\omega = \Omega$, а коэффициент отражения $|\delta_{WW}(\omega)|^2$ не всегда достигает максимального значения $|\gamma_0(\omega)|^2$. Данный эффект наблюдается в случае, если расстояние между начальным положением гауссова пакета и кубитом x_0 меньше или сопоставимо с его пространственной шириной Δx . За это свойство отвечает главное значение интегралов в (2.4.10). С другой стороны, форма линий для обеих моделей расчета похожа. Коэффициент пропускания $|\gamma_{WW}(\omega)|^2$ сдвинут вверх относительно $|\gamma(\omega)|^2$, а коэффициент отражения $|\delta_{WW}(\omega)|^2$, наоборот, сдвинут вниз относительно $|\delta(\omega)|^2$.

2.5. Двух-кубитная система

2.5.1 Общие выражения для двух кубитов

В этом разделе рассматривается рассеяние однофотонного импульса на двух-кубитной системе, связанной с одномерным волноводом. Рассмотрим два кубита, расположенных в координатах $x_1 = 0$ и $x_2 = d$. Из уравнений (2.3.11) получаем два связанных уравнения для фурье-компонент кубитных амплитуд $\beta_1(\nu)$ и $\beta_2(\nu)$:

$$\left(\Delta(\nu) + i \frac{\Gamma(\nu)}{2} \right) \beta_1(\nu) + i \frac{\Gamma(\nu)}{2} \beta_2(\nu) \left(e^{ik_\nu d} + iG(k_\nu d) \right) = C_1(\nu), \quad (2.5.1a)$$

$$\left(\Delta(\nu) + i \frac{\Gamma(\nu)}{2} \right) \beta_2(\nu) + i \frac{\Gamma(\nu)}{2} \beta_1(\nu) \left(e^{ik_\nu d} + iG(k_\nu d) \right) = C_2(\nu), \quad (2.5.1b)$$

где введена расстройка $\Delta(\nu) = \nu - \Omega - F(\nu)$, и дополнительные коэффициенты:

$$C_1(\nu) = \pi g(\nu) \gamma_0(\nu) + iP \int_0^\infty d\omega \frac{g(\omega) \gamma_0(\omega)}{\nu - \omega}, \quad (2.5.2a)$$

$$C_2(\nu) = \pi g(\nu) \gamma_0(\nu) e^{ik_\nu d} + iP \int_0^\infty d\omega \frac{g(\omega) \gamma_0(\omega) e^{ik_\omega d}}{\nu - \omega}. \quad (2.5.2b)$$

Из (2.5.1) мы находим полные выражения для кубитных амплитуд:

$$\beta_1(\nu) = \frac{\left(\Delta(\nu) + i \frac{\Gamma(\nu)}{2} \right) C_1(\nu)}{\left(\Delta(\nu) + i \frac{\Gamma(\nu)}{2} \right)^2 + \frac{\Gamma^2(\nu)}{4} \left(e^{ik_\nu d} + iG(k_\nu d) \right)^2} - \frac{i \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(e^{ik_\nu d} + iG(k_\nu d) \right) C_2(\nu)}{\left(\Delta(\nu) + i \frac{\Gamma(\nu)}{2} \right)^2 + \frac{\Gamma^2(\nu)}{4} \left(e^{ik_\nu d} + iG(k_\nu d) \right)^2}, \quad (2.5.3a)$$

$$\beta_2(\nu) = \frac{\left(\Delta(\nu) + i \frac{\Gamma(\nu)}{2} \right) C_2(\nu)}{\left(\Delta(\nu) + i \frac{\Gamma(\nu)}{2} \right)^2 + \frac{\Gamma^2(\nu)}{4} \left(e^{ik_\nu d} + iG(k_\nu d) \right)^2} - \frac{i \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(e^{ik_\nu d} + iG(k_\nu d) \right) C_1(\nu)}{\left(\Delta(\nu) + i \frac{\Gamma(\nu)}{2} \right)^2 + \frac{\Gamma^2(\nu)}{4} \left(e^{ik_\nu d} + iG(k_\nu d) \right)^2}, \quad (2.5.3b)$$

где:

$$G(k_\nu d) = \frac{1}{\pi} \cos k_\nu d \operatorname{Ci}(k_\nu d) + \frac{1}{\pi} \sin k_\nu d \left(-\frac{\pi}{2} + \operatorname{Si}(k_\nu d) \right). \quad (2.5.4)$$

Из (2.3.15) мы получаем амплитуды рассеяния для больших времен $t \rightarrow \infty$:

$$\gamma(\omega, t \rightarrow \infty) = \gamma_0(\omega) - ig(\omega) \frac{\left(\Delta(\omega) + \frac{\Gamma}{2} e^{-ikd} G(kd) \right) C_1(\omega)}{\left(\Delta(\omega) + i \frac{\Gamma}{2} \right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \left(e^{ikd} + iG(kd) \right)^2} \quad (2.5.5a)$$

$$-ig(\omega) \frac{\left(\Delta(\omega) e^{-ikd} + \Gamma \sin kd + \frac{\Gamma}{2} G(kd) \right) C_2(\omega)}{\left(\Delta(\omega) + i \frac{\Gamma}{2} \right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \left(e^{ikd} + iG(kd) \right)^2},$$

$$i\delta(\omega, t \rightarrow \infty) e^{-ikd} / g(\omega) = \frac{\left(\Delta(\omega) + \frac{\Gamma}{2} e^{-ikd} G(kd) \right) C_2(\omega)}{\left(\Delta(\omega) + i \frac{\Gamma}{2} \right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \left(e^{ikd} + iG(kd) \right)^2} \quad (2.5.5b)$$

$$+ \frac{\left(\Delta(\omega) e^{-ikd} + \Gamma \sin kd + \frac{\Gamma}{2} G(kd) \right) C_1(\omega)}{\left(\Delta(\omega) + i \frac{\Gamma}{2} \right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \left(e^{ikd} + iG(kd) \right)^2},$$

где $k = \omega / v_g$, $\Gamma \equiv \Gamma(\omega)$, и $C_1(\omega)$, $C_2(\omega)$ даны в (2.5.2).

Еще раз отметим, что вывод прошедшей и отраженной амплитуд (2.5.5a) и (2.5.5b) не ограничен приближением Вигнера-Вайскопфа $\Gamma(\Omega) \ll \Omega$. Данные выражения справедливы и для сверхсильной связи, когда $\Gamma(\Omega) \leq \Omega$.

2.5.2 Свойства коэффициента $G(kd)$

Рассмотрим подробнее коэффициент (2.3.12) на примере его выражения для двух кубитов (2.5.4). Из знаменателя в (2.5.3) находим уравнения для особых точек (полюсов), лежащих в нижней части комплексной частотной плоскости ω :

$$\begin{aligned}\Delta_-(\omega) &= -\frac{\Gamma(\omega)}{2}(\sin kd + G(kd)) - i\frac{\Gamma(\omega)}{2}(1 - \cos kd), \\ \Delta_+(\omega) &= \frac{\Gamma(\omega)}{2}(\sin kd + G(kd)) - i\frac{\Gamma(\omega)}{2}(1 + \cos kd).\end{aligned}\tag{2.5.6}$$

Численные расчеты показывают, что в широком диапазоне частот величина $G(kd)$ весьма мала (см. рисунок 2.5). Заметная разница между $\sin(kd)$ и $\sin(kd) + G(kd)$ наблюдается только в случае, если $kd < \pi/2$. (см. рисунок 2.6a) Поэтому при малых $k_0d = \Omega d/v_g$ значительный вклад в сдвиг частоты вносит как раз $G(kd)$.

Число полюсов зависит от межкубитного расстояния d . Учитывая приближение Вигнера-Вайскопфа, $\Gamma(\Omega)/\Omega \ll 1$, мы можем спокойно заменить в правой части уравнений (2.5.6) текущую частоту ω на частоту кубита Ω . Таким образом, в области комплексной частоты получаем два полюса:

$$\omega_{\pm} = \Omega + \Delta\Omega_{\pm} - i\Gamma_{\pm},\tag{2.5.7}$$

где $\Delta\Omega_{\pm}$ это частотный сдвиг:

$$\Delta\Omega_{\pm} = F(\Omega) \pm \frac{\Gamma(\Omega)}{2}(\sin k_0d + G(k_0d)),\tag{2.5.8}$$

а $\Gamma_{\pm}$ это модифицированная скорость спонтанного излучения:

$$\Gamma_{\pm} = \frac{\Gamma(\Omega)}{2}(1 \pm \cos(k_0d)),\tag{2.5.9}$$

где $k_0 = \Omega/v_g$.

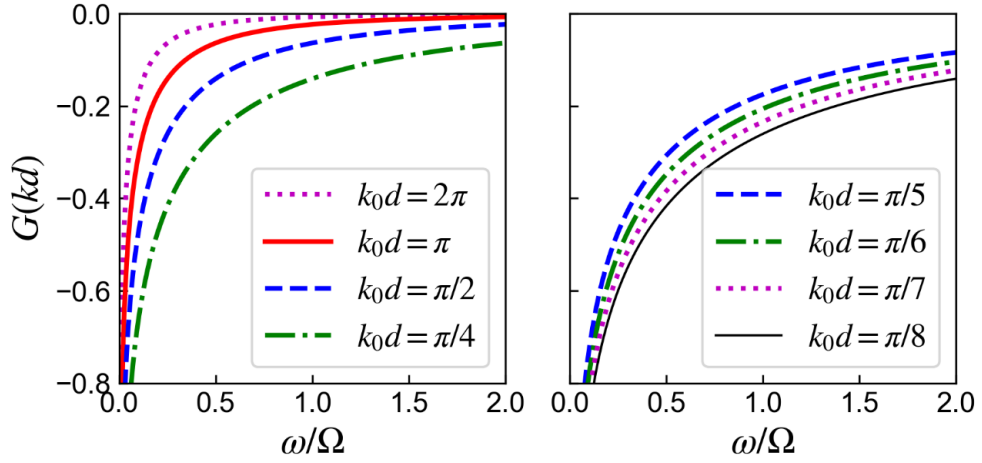


Рис. 2.5. Частотная зависимость $G(kd) = G(k_0 d \times \omega / \Omega)$, где $k_0 = \Omega / v_g$, для некоторых межкубитных расстояний: слева – $d = \lambda, \lambda/2, \lambda/4, \lambda/8$; справа – $d = \lambda/10, \lambda/12, \lambda/14, \lambda/16$; Интересующие нас значения находятся вблизи резонансной частоты, $\omega / \Omega \sim 1$. Заметную величину $G(kd)$ имеет только при достаточно малых расстояниях $d < \lambda/8$.

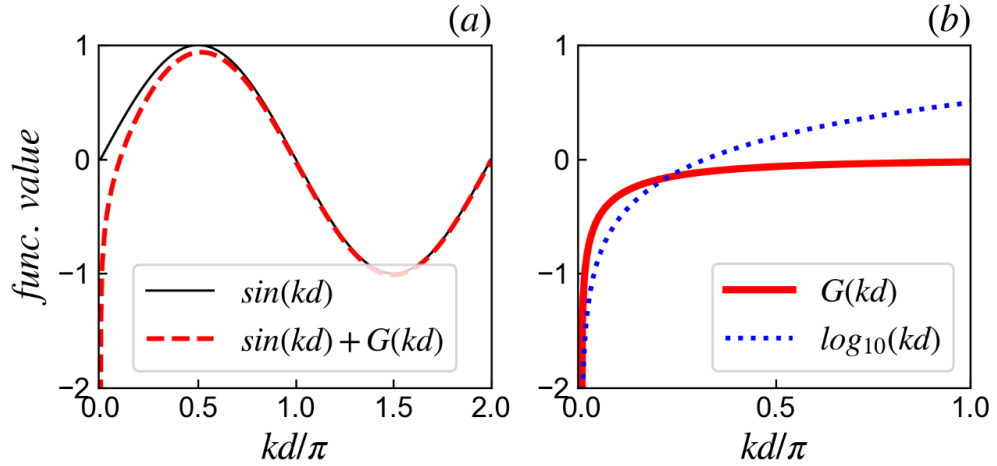


Рис. 2.6. (a) Сравнение функций $\sin(kd)$ и $\sin(kd) + G(kd)$ в зависимости от kd для частоты резонанса $\omega = \Omega$. Существенные отклонения начинаются для значений $kd = \pi/2$ и ниже. (b) Зависимость коэффициента G от межкубитного расстояния kd и сравнение с функцией десятичного логарифма.

Это двухполюсное приближение по сути является марковским приближением. Это значит, что можно пренебречь эффектами задержки: два кубита мгновенно взаимодействуют с падающим фотоном. Как было показано в [Zheng13], марковское приближение все еще справедливо для $k_0 d < 5\pi$.

Немарковский режим описывается формулой (2.5.6), где ω — текущая частота падающего фотона. Из этих уравнений следует, что энергии резонансов и их ширина линий зависят от частоты падающего фотона, который входит в (2.5.6) через волновой вектор $k = \omega/v_g$. Это общая особенность немарковского поведения, когда фотонное взаимодействие между кубитами не является мгновенным и необходимо учитывать эффекты задержки во времени. В нашем методе эффекты запаздывания учитываются автоматически, поскольку величина kd явно входит в выражения для амплитуд прохождения и отражения. Также принято пренебрегать частотной зависимостью скорости спонтанного излучения Γ , сохраняя ее постоянной. В этом случае немарковское поведение проявляется через волновой вектор k [Zheng13].

Из (2.5.8) мы видим, что $G(k_0d)$ отвечает за сдвиг частоты, следовательно, модифицирует межкубитное взаимодействие. Более того, мы не можем отключить взаимодействие двух кубитов, просто взяв $k_0d = n\pi$, где n — целое число. Из выражения (2.5.4) явно следует, что $G(k_0d)$ не равен нулю при конкретных значениях k_0d вроде $n\pi$. Однако, как видно из рисунка 2.5, его вклад достаточно мал, и начинает проявляться только при сближении кубитов на достаточно близкое расстояние, порядка $\lambda/8$ и меньше. Кроме того, можно отметить, что зависимость $G(kd)$ очень близка к $\log_{10}(k_0d)$, и как следствие сильно возрастает при сближении кубитов на близкое расстояние друг относительно друга.

Все вышесказанное позволяет сделать вывод, что коэффициент $G(kd)$ является одномерным аналогом диполь-дипольного взаимодействия между кубитами, учет которого в одномерной цепочке атомов приводит к нарушению фазовой когерентности между ними. Таким образом, можно утверждать, что учет только физической (положительной) области частот позволяет получить верное описание межатомного взаимодействия в цепочке кубитов, а именно учитывает диполь-дипольное взаимодействие между ними, чего нет в нестационарной модели рассеяния.

2.5.3 Фотонные амплитуды

Как и в случае с одиночным кубитом, можно показать, что в рамках приближения Вигнера-Вайскопфа и для узкого падающего импульса уравнения (2.5.5a) и (2.5.5b) преобразуются в проходящий и отраженные спектры, которые известны из стационарных теорий рассеяния.

Вычисление $C_1(\omega)$ (2.5.2a) и $C_2(\omega)$ (2.5.2b) для дельта-импульса (2.4.6) аналогично случаю с одиночным кубитом (2.4.7):

$$\begin{aligned} C_1(\omega) &= 2\pi g(\omega)\gamma_0(\omega), \\ C_2(\omega) &= 2\pi g(\omega)\gamma_0(\omega)e^{ik_0d}. \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

Затем, предполагая, что кубиты изначально находятся в основном состоянии, и используя уравнения (2.3.15), мы получаем спектры прохождения и отражения для двухкубитной системы в приближении Вигнера-Вайскопфа:

$$\gamma(\omega, t \rightarrow \infty) = \gamma_0(\omega) \frac{\Delta_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4} G^2(kd) + i \frac{\Gamma^2}{2} (1 - \cos kd) G(kd)}{\left(\Delta_0 + i \frac{\Gamma}{2} \right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \left(e^{ikd} + i G(kd) \right)^2}, \quad (2.5.11a)$$

$$\delta(\omega, t \rightarrow \infty) = -i \frac{\Gamma}{2} \gamma_0(\omega) e^{ikd} \frac{2\Delta_0 \cos kd + \Gamma \sin kd + \Gamma G(kd)}{\left(\Delta_0 + i \frac{\Gamma}{2} \right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \left(e^{ikd} + i G(kd) \right)^2}, \quad (2.5.11b)$$

где $\Delta_0 = \omega - \Omega$, $\gamma_0(\omega)$ это падающий дельта-импульс (2.4.6) и $\Gamma \equiv \Gamma(\Omega)$.

Упрощая далее, будем считать расстояние между кубитами достаточно большим, $kd \gg \pi$. Для этого случая в пределах ширины резонансной линии величина $|G(kd)| \ll 1$ (см. рисунок 2.5). Следовательно, мы можем не учитывать $G(kd)$ в выражениях (2.5.11):

$$\gamma(\omega, t \rightarrow \infty) = \gamma_0(\omega) \frac{(\omega - \Omega)^2}{\left(\omega - \Omega + i \frac{\Gamma}{2} \right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} e^{2ik_\omega d}}, \quad (2.5.12a)$$

$$\delta(\omega, t \rightarrow \infty) = -i \frac{\Gamma}{2} \gamma_0(\omega) e^{ik_\omega d} \frac{2(\omega - \Omega) \cos(k_\omega d) + \Gamma \sin(k_\omega d)}{\left(\omega - \Omega + i \frac{\Gamma}{2} \right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} e^{2ik_\omega d}}. \quad (2.5.12b)$$

Марковское приближение получается заменой k_ω на k_Ω в (2.5.11) и (2.5.12).

Выражения (2.5.12) совпадают с полученными в [Liao15] для произвольной формы падающего импульса $\gamma_0(\omega)$. Напомним, что эти результаты были найдены с учетом нефизической, т.е. отрицательной частоты.

Далее, находим из уравнений (2.5.5a) и (2.5.5b) амплитуды рассеяния в прямом направлении $\gamma(\omega, t \rightarrow \infty)$, и в обратном $\delta(\omega, t \rightarrow \infty)$. Для упрощения, в этих уравнениях мы предполагаем, что скорость спонтанного излучения постоянна, $\Gamma(\omega) = \Gamma(\Omega) \equiv \Gamma$. Однако немарковская нелинейная динамика все еще присутствует, поскольку выражения (2.5.5a) и (2.5.5b) зависят от частоты фотонов через $k = \omega/v_g$. Следовательно, эти выражения преобразуются следующим образом:

$$\gamma_{WW}(\omega, t \rightarrow \infty) = \gamma_0(\omega) - \frac{\Gamma \left(\omega - \Omega + \frac{\Gamma}{2} e^{-ikd} G(kd) \right) \left(i\gamma_0(\omega) + \frac{1}{\pi} P \int_0^\infty d\omega' \frac{\gamma_0(\omega')}{\omega' - \omega} \right)}{\left(\omega - \Omega + i \frac{\Gamma}{2} \right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \left(e^{ikd} + iG(kd) \right)^2} - \frac{\Gamma \left((\omega - \Omega) e^{-ikd} + \Gamma \sin kd + \frac{\Gamma}{2} G(kd) \right) \left(i\gamma_0(\omega) e^{ikd} + \frac{1}{\pi} P \int_0^\infty d\omega' \frac{\gamma_0(\omega') e^{ik'd}}{\omega' - \omega} \right)}{4 \left(\omega - \Omega + i \frac{\Gamma}{2} \right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \left(e^{ikd} + iG(kd) \right)^2}, \quad (2.5.13a)$$

$$\delta_{WW}(\omega, t \rightarrow \infty) = -e^{ikd} \frac{\Gamma \left(\omega - \Omega + \frac{\Gamma}{2} e^{-ikd} G(kd) \right) \left(i\gamma_0(\omega) e^{ikd} + \frac{1}{\pi} P \int_0^\infty d\omega' \frac{\gamma_0(\omega') e^{ik'd}}{\omega' - \omega} \right)}{4 \left(\omega - \Omega + i \frac{\Gamma}{2} \right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \left(e^{ikd} + iG(kd) \right)^2} - e^{ikd} \frac{\Gamma \left((\omega - \Omega) e^{-ikd} + \Gamma \sin kd + \frac{\Gamma}{2} G(kd) \right) \left(i\gamma_0(\omega) + \frac{1}{\pi} P \int_0^\infty d\omega' \frac{\gamma_0(\omega')}{\omega' - \omega} \right)}{4 \left(\omega - \Omega + i \frac{\Gamma}{2} \right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \left(e^{ikd} + iG(kd) \right)^2}. \quad (2.5.13b)$$

Ниже показаны спектры прямого и обратного излучения, рассчитанные по точным выражениям (2.5.13a) и (2.5.13b), и их сравнение с приближенными расчетами по выражениям (2.5.12), полученными в [Liao15].

Как и в случае с одним кубитом, здесь фотонные спектры также зависят от начального расстояния x_0 от центра гауссова пакета до первого кубита. Эта зависимость показана на рис. 2.7 для $k_0 d = \pi/2$ ($d = \lambda/4$). Для относительно большого расстояния, $x_0 = 0,4 \text{ м} \gg \Delta x$, точные выражения (2.5.13) дают практически тот же самый результат, что и приближенное решение (2.5.12). Когда начальное положение гауссова импульса расположено ближе к первому кубиту, спектральные линии начинают расходиться. Наконец, поставив импульс вплотную к кубиту мы получим значительные отличия в спектрах, которые показаны на нижнем графике рис. 2.7.

Как известно, в N-кубитной системе интерференция Фано приводит к резким и ассиметричным спектральным линиям [Mukhopadhyay19]. В частности, для отраженной амплитуды получается N-1 нулей, что и является проявлением интерференции Фано [Miroshnichenko10]. Для двух-кубитной системы имеется один ноль для отраженной амплитуды на частотной оси, положение которого зависит от кубитных параметров Ω и Γ .

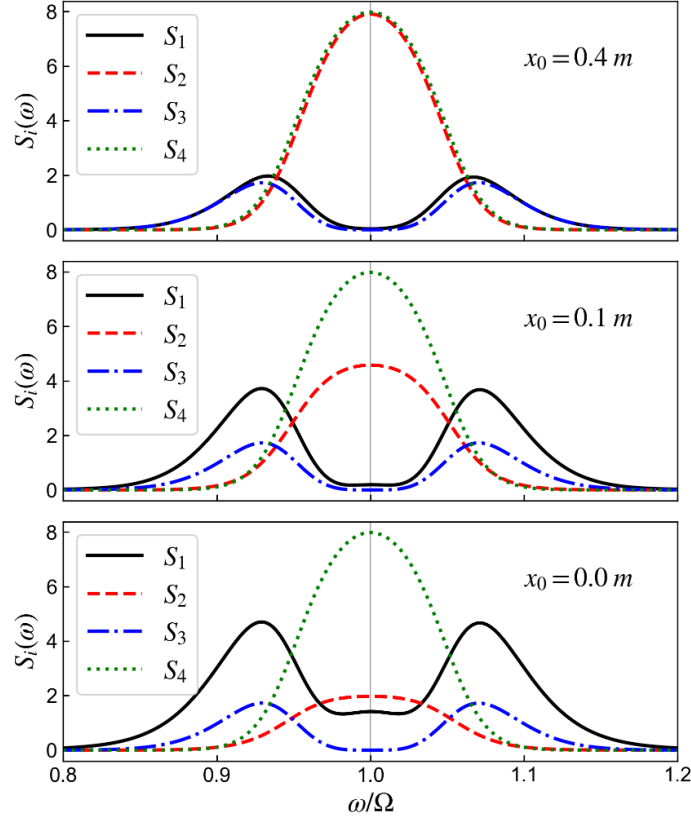


Рис. 2.7. Фотонный спектр рассеяния гауссова импульса на двух кубитах для разных начальных положений пакета x_0 . На этих и остальных графиках сравниваются спектры прошедшей и отраженной волн для точного решения (2.5.13) и приближенного решения в рамках нестационарной модели (2.5.12). Прошедший спектр из точных выражений $S_1(\omega) = |\gamma_{ww}(\omega)|^2 \Omega$ – сплошная черная линия; отраженный спектр для точного решения $S_2(\omega) = |\delta_{ww}(\omega)|^2 \Omega$ – красная пунктирная линия; прошедший спектр из приближенного расчета $S_3(\omega) = |\gamma(\omega)|^2 \Omega$ – штрих-пунктирная синяя линия, отраженный спектр приближенного решения $S_4(\omega) = |\delta(\omega)|^2 \Omega$ – точечная зеленая линия. Параметры системы и начального импульса, использованные в расчете: $\omega_s/\Omega = 1$, $\Gamma/\Omega = 0,1$; $\Delta/\Omega = 0,1$; $k_0 d = \pi/2$.

Ниже представлена зависимость прошедших и отраженных амплитуд от расстояния x_0 в случае интерференции Фано.

Прошедшие и отраженные спектры для $k_0 d = 2,25\pi$ и $x_0 = 0,5\text{ м}$ показаны на Рис. 2.8. Хорошо видно, что точные спектры (2.5.13) полностью совпадают со спектрами, полученными из приближенного решения (2.5.12). Это происходит по двум причинам. Во-первых, расстояние между начальным положением гауссова пакета и первым кубитом намного больше, чем пространственная ширина импульса (50 см и 10 см соответственно). Во-вторых, кубиты разнесены достаточно далеко, так что влияние диполь-дипольного взаимодействия $G(kd)$ на спектральные линии для $k_0 d = 2,25\pi$ очень мало по сравнению с шириной резонансов (смотри

рис. 2.5). Проявление интерференции Фано заметно не только для отраженного спектра (ноль на нижнем графике рисунка 2.8), но и для прошедшего спектра (острая асимметричная форма линии прохождения на верхнем графике, рис. 2.8).

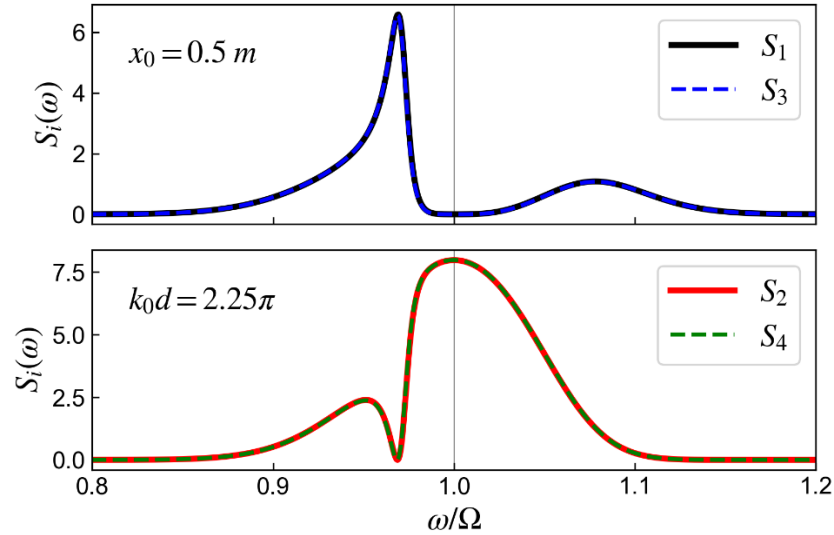


Рис. 2.8. Спектры прошедшего (вверху) и отраженного (внизу) гауссова импульса для двух кубитов. Черная и красная сплошные линии соответствуют точному решению (2.5.13), а синяя и зеленая пунктирные линии – приближенному решению (2.5.12). Обозначения $S_{1...4}$ аналогичны использованным на рис. 2.7. Параметры системы и начального импульса, использованные в расчете: $\omega_s/\Omega = 1$; $\Gamma/\Omega = 0,1$; $\Delta/\Omega = 0,1$; $k_0 d = 2,25\pi$; $x_0 = 0,5\text{м}$.

Более подробно влияние коэффициента $G(kd)$ на прошедший и отраженный спектры показано на рисунке 2.9. Здесь расстояние x_0 достаточно большое, так что все отклонения спектральных линий от приближенного решения связаны именно с влиянием $G(kd)$ в точных выражениях. Вклад в частотный сдвиг от $G(kd)$ можно отчетливо видеть из сравнения линий для точного и приближенного решений. Чем меньше значение $k_0 d$, тем больше влияние $G(kd)$ в рамках ширины спектральных линий.

Зависимость прошедшего и отраженного спектров от расстояния x_0 между начальным положением гауссова импульса и первым кубитом показана на рисунке 2.10. Эти графики построены для значения $k_0 d = 2,25\pi$ что позволяет нам пренебречь вкладом от диполь-дипольного взаимодействия $G(kd)$ в точных выражениях (2.5.13), оставив только зависимость от x_0 . Спектральные амплитуды для приближенного решения (2.5.12) вовсе не зависят от x_0 . Если x_0 имеет достаточно большое значение в сравнении с шириной импульса, то спектры для точного решения близки к спектрам нестационарной модели (верхний график на рис. 2.10). Наибольшее отклонение наблюдается для $x_0 = 0$ (нижний график на рис. 2.10).

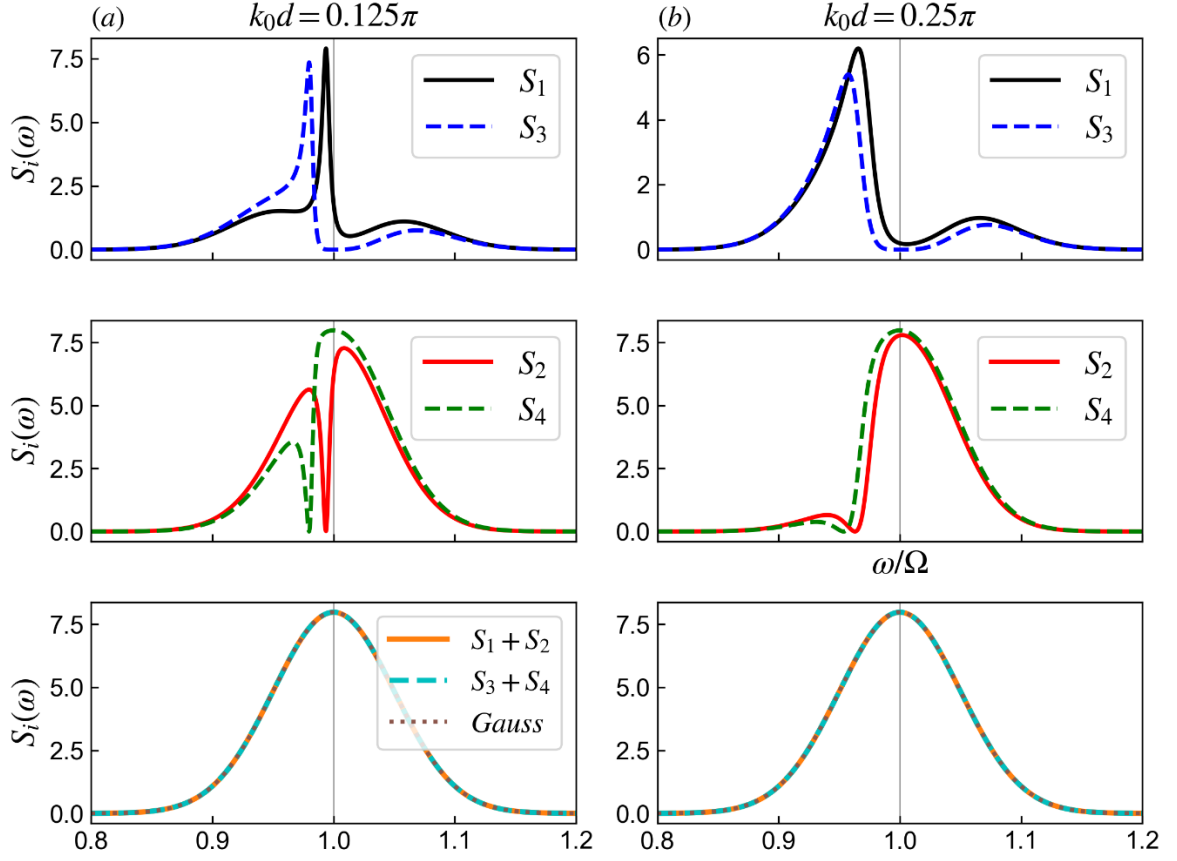


Рис. 2.9. Спектры прошедшего (верхний ряд) и отраженного (средний ряд) гауссова импульса для двух кубитов, и их сумма (нижний ряд) для двух значений эффективного меж-кубитного расстояния (a) $k_0d = 0,125\pi$ и (b) $k_0d = 0,25\pi$. Черная и красная сплошные линии соответствуют точному решению (2.5.13), а пунктирная зеленая и синяя – приближенному решению (2.5.12). Обозначения $S_{1...4}$ аналогичны использованным на рис. 2.7. Видно, что для малых значений меж-кубитных расстояний $k_0d = 0,125\pi$ и $k_0d = 0,25\pi$ частотный сдвиг становится существенным (сравни с рис. 2.8). На нижних графиках показана сумма спектров прохождения и отражения, которая точно совпадает с квадратом модуля начального Гауссова пакета (2.4.9). Остальные параметры системы: $\omega_S/\Omega = 1$; $\Gamma/\Omega = 0,1$; $\Delta/\Omega = 0,1$; $x_0 = 0,5m$.

Из наших результатов следует, что близкое расположение источника фотонов приводит к значительным изменениям фотонных спектров излучения. Эти изменения значительно проявляются, если расстояние от начального положения центра падающего импульса до кубитной цепочки сравнимо или меньше, чем ширина импульса в конфигурационном пространстве. Данный эффект может иметь важное значение, ведь в эксперименте генератор управляющих импульсов следует размещать как можно ближе к схеме измеряемого кубита, например, на одном чипе со сверхпроводящим кубитом при температурах в несколько десятков милликельвин [Лесосц21]. Это позволяет значительно снизить уровень шумов и прочих

искажений по сравнению со случаем, когда генератор поля находится на более высоком каскаде с большими значениями температуры в районе 1 К.

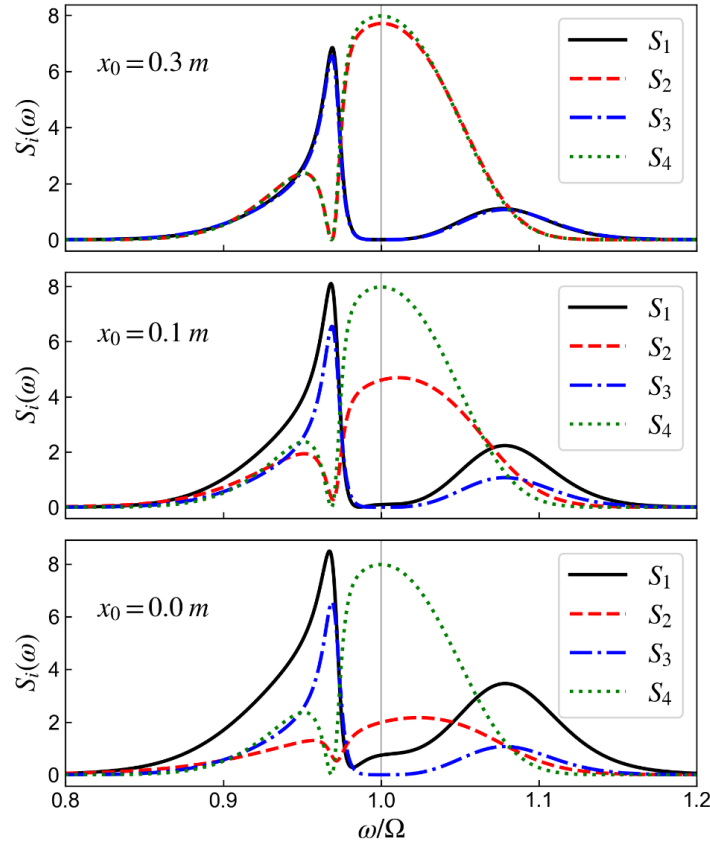


Рис. 2.10. Фотонный спектр рассеяния гауссова импульса на двух кубитах для разных расстояний x_0 между начальным положением импульса и первым кубитом. На этих и всех остальных графиках сравниваются спектры прошедшей и отраженной волн для точного решения (2.5.13) и приближенного решения в рамках нестационарной модели (2.5.12). Обозначения аналогичны рис. 2.7. Параметры системы и начального импульса, использованные в расчете: $\omega_S/\Omega = 1$; $\Gamma/\Omega = 0,1$; $\Delta/\Omega = 0,1$; $k_0d = 2,25\pi$.

Наконец, на рисунке 2.11 показаны фотонные спектры для разных значений k_0d , рассчитанных при $x_0 = 0$. Эти значения соответственно $k_0d = 0,125\pi$ ($d = \lambda/16$), $k_0d = 1,125\pi$ ($d = 9\lambda/16$), $k_0d = 3,125\pi$ ($d = 25\lambda/16$). Значительное отличие линий для первого графика объясняется влиянием $G(kd)$, которое для остальных двух случаев пренебрежимо мало. Также стоит отметить очень острые и узкие пики для прошедшей волны S_1 . Пик на нижнем графике рисунка 2.11 ($k_0d = 3,125\pi$) имеет максимум, равный 14,7. Данные острые пики есть явное проявление немарковских эффектов и суб-радиантных переходов, которые содержат очень узкие линии излучения, характерные для резонансов Фано [Miroshnichenko10]. Как видно из рис.2.11b, спектральный профиль этих резонансов значительно отличается для наших результатов от

известной нестационарной модели, особенно для прошедшего спектра при малых меж-кубитных расстояниях (сравни черную и синюю линии на верхнем графике рис. 2.11b).

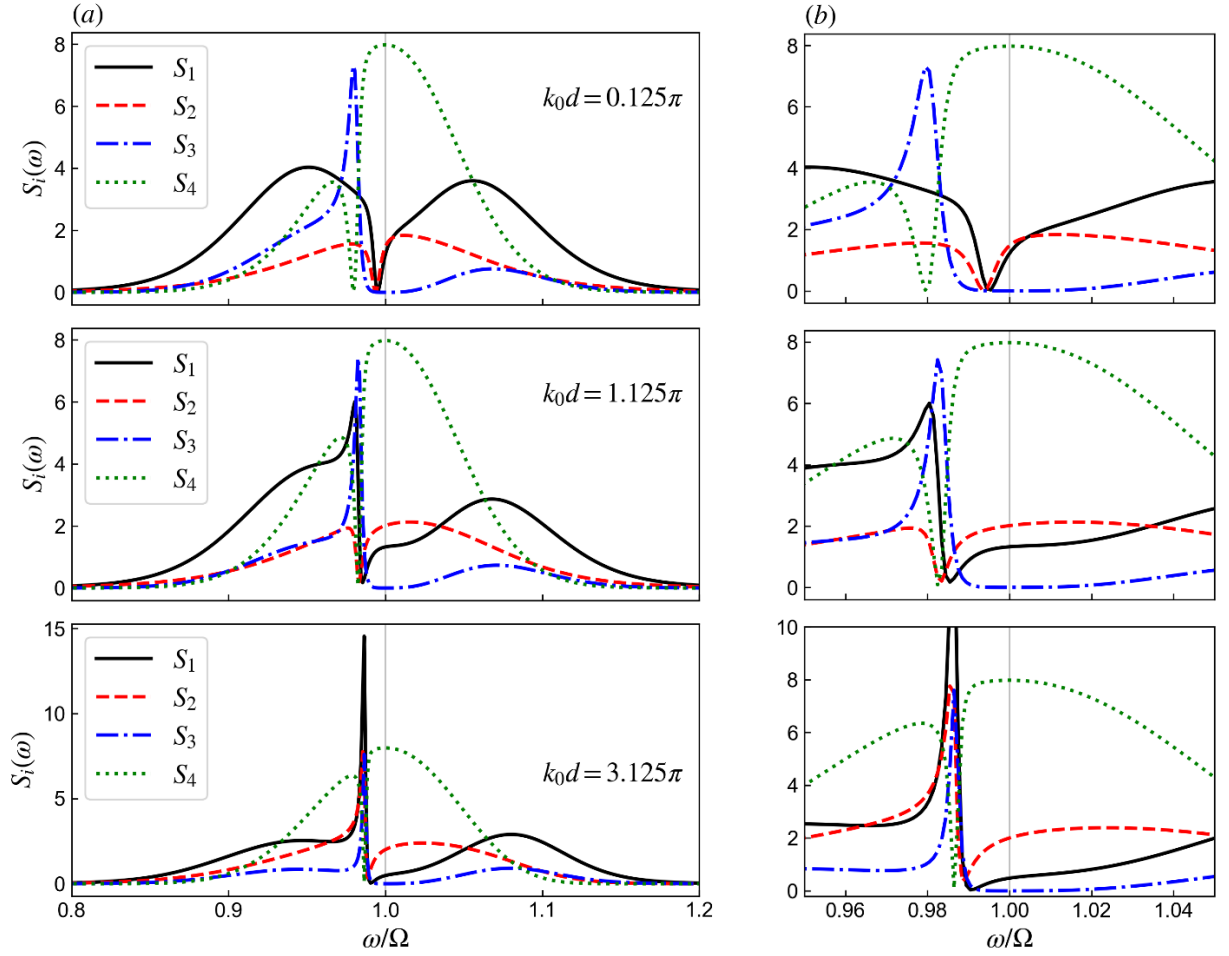


Рис. 2.11. (a) Фотонный спектр рассеяния гауссова импульса на двух кубитах для разных значений эффективного меж-кубитного расстояния k_0d , когда импульс генерируется вплотную к первому кубиту. (b) Приближенный масштаб в области резонанса. Все обозначения аналогичны рис. 2.10. Параметры системы и начального импульса, использованные в расчете: $\omega_S/\Omega = 1$; $\Gamma/\Omega = 0,1$; $\Delta/\Omega = 0,1$; $x_0/\Delta_x = 0$.

Для всех графиков на рисунках 2.7-2.11 мы отслеживали параметр нормировки $I = \int d\omega |\gamma_{WW}(\omega)|^2 + \int d\omega |\delta_{WW}(\omega)|^2$, для которого интегрирование проводилось по области частот, указанных на графиках. Для всех случаев без исключений параметр I отличался от единицы не более чем на несколько тысячных.

2.6. Выводы к главе 2

В данной главе мы проанализировали рассеяние однофотонного гауссова импульса на одномерной цепочке двухуровневых искусственных атомов (кубитов), встроенных в одномерный открытый волновод. Система описывалась гамильтонианом Джейнса-Каммингса в непрерывном континууме в рамках одного возбуждения. Динамические уравнения для кубитных амплитуд и для прошедших и отраженных фотонных спектров решались с помощью метода Гайтлера. В отличие от известных моделей, наши расчеты выполнены только для физической (положительной) оси частот. Как было показано, учет данного фактора существенно изменяет динамику системы. Во-первых, это приводит к правильному механизму описания диполь-дипольного взаимодействия между кубитами, в котором сила этого взаимодействия растет как натуральный логарифм от межатомного расстояния, и не может быть просто “выключена” выставлением определенного эффективного расстояния, равного пл. Во-вторых, формы линии прошедшего и отраженного спектров существенно зависят от формы падающего импульса. Мы применили нашу теорию к однокубитной и двухкубитной системам. Для этих двух случаев мы получили явные выражения для амплитуд кубитов и спектров фотонов. Для падающего гауссова импульса были рассчитаны формы линий прошедших и отраженных спектров, которые существенно отличаются от известных результатов, в которых используется продление кубит-фотонного взаимодействия в отрицательную область частот. Эти отличия можно свести к трем основным моментам:

1) Показано, что формы спектральных линий существенно зависят от расстояния x_0 между начальным положением гауссова импульса и первым кубитом в цепочке. Если это расстояние сравнимо или меньше, чем ширина импульса в конфигурационном пространстве, то спектральные линии начинают ощутимо изменяться. Чем меньше становится это расстояние, т.е. чем ближе мы устанавливаем источник поля к кубитной системе, тем сильнее спектральные линии начинают отклоняться от известных результатов, полученных с условием продления кубит-фотонной связи в область отрицательных частот.

2) Спектры для прошедшего поля на резонансной частоте кубита не всегда равны нулю. В рамках ранее разработанных теорий рассеяния в одномерных волноводах было доказано, что падающий на кубит резонансный фотон со 100% вероятностью отражается в обратном направлении, т.е. кубит работает как идеальное зеркало. Разумеется, в реальных экспериментах существует некоторая доля прошедшего сигнала, хоть и очень малая. С физической точки зрения ненулевой коэффициент прохождения обычно связывают с внешними потерями, т.е. с разного рода утечками поля из волновода, либо несовершенством самого кубита. В случае же нашего

расчета, эффект ненулевого прохождения связан с близостью начального положения гауссова импульса к кубитной цепочке.

3) В нашем расчете присутствует дополнительная добавка к частотному сдвигу, обусловленная диполь-дипольным взаимодействием между кубитами. Она сильно зависит от меж-кубитного расстояния d , и начинает активно влиять на смещение спектральных линий при достаточно малых его значениях, когда $d < \lambda/8$ или меньше.

Таким образом, нестационарная теория рассеяния, разработанная в данной главе, позволяет описывать кубитные системы, не ограниченные большими расстояниями – как между самими кубитами ($d \ll \lambda$), так и между источниками импульсов и кубитной цепочкой ($x_0 \ll \Delta x$).

Мы считаем, что полученные результаты могут иметь важное практическое применение в рамках волноводной квантовой электродинамики. В настоящее время при разработке современных систем квантовых технологий, включающих сверхпроводниковые кубиты, исследователи и инженеры рассматривают возможность установки импульсных источников контроля и считывания как можно ближе к кубитным системам. Такое расположение источников полей позволит значительно сократить уровень шумов за счет физического уменьшения тракта сигналов. Более того, вполне возможно даже размещение импульсных источников на том же самом чипе, на котором произведен кубитный образец. Таким образом, и кубит и источник фотонов будут оперироваться при очень низких температурах в десятки милликельвин. Такая близость источников фотонных полей к кубитной цепочке может привести к появлению определенных новых эффектов и отличий от известных результатов, как мы и продемонстрировали в нашей работе.

Отметим, что наш подход может быть расширен далее и применен к задачам волноводной квантовой электродинамики, включающим рассеяние падающего импульса на многоуровневых кубитах в режимах сильной связи между излучением и веществом.

Глава 3. Однофотонное вынужденное излучение для систем квантовой электродинамики на чипе

3.1. Введение

Обычно при рассмотрении задач одномерного фотонного транспорта принято считать, что кубиты всегда находятся в основном состоянии. Таким образом, задача будет ограничена однофотонным пределом. Такого типа работы существуют в большом количестве, для стационарной задачи [Shen05a, Shen05b], и с учетом динамики системы [Chen11, Liao16b] (подробные рассуждения по теме и перечисление работ см. в предыдущей главе в разделе 2.1). Тем не менее, в реальных условиях однофотонный предел не всегда выполняется. Кроме того, выход за его пределы позволяет рассматривать определенный ряд интересных задач, таких как фотон-фотонные взаимодействия и влияние искусственных атомов на формирование фотонных импульсов, а также процесс вынужденного излучения.

Концепция вынужденного излучения, введенная А. Эйнштейном [Einstein17], лежит в основе принципа действия современных лазеров. Эффект усиления в этих устройствах основан на неотличимости фотонов входящего пучка от фотонов, испускаемых атомами в ходе процесса. Несмотря на то, что физика лазеров хорошо изучена на фундаментальном уровне, изучение динамики вынужденного излучения на уровне отдельных фотонов в структурированных материалах, или волноводах, по-прежнему представляет значительный интерес [Lamas01, Lamas02]. Недавно в двухфотонных экспериментах было показано, что вынужденное излучение с усилением является результатом фундаментального принципа квантовой суперпозиции, приводящего к многофотонной конструктивной интерференции [Sun07].

Для ограниченных геометрий, таких как одномерные волноводные структуры, существует несколько работ в которых изучалось индуцированное излучение от одного двухуровневого атома, вызванное однофотонным, фоковским, или когерентным импульсом [Fischer18, Asaoka22, Valente12a, Rephaeli12]. Стационарное состояние и переходная динамика стимулированного излучения, индуцированного постоянным возбуждением, были изучены в работе [Valente12b]. Рассеяние одного фотона на возбужденном кубите в полу-бесконечном волноводе и связь с немарковской динамикой кубита рассматривалась в работе [Fang18] с использованием подхода открытых квантовых систем. Также стоит отметить работу [Drobny00], в которой было показано, что стимулированное излучение от атома, который изначально был подготовлен в основном состоянии, может быть индуцировано однофотонным многомодовым волновым пакетом.

Существуют также схожие по теме работы, изучающие рассеяние двух фотонов одним кубитом в основном состоянии (см. [Nysteen15, Konyk16, Roulet16] и ссылки в них), в одной из которых показано, как однофотонное стимулированное излучение в волноводной квантовой электродинамике влияет на "очистку" квантового состояния трехуровневого кубита лямбда-типа [Lopes24].

В данной главе рассматривается задача о рассеянии однофотонных полей на одиночном кубите в копланарном волноводе, но с двух точек зрения – в случае, когда кубит находится в основном состоянии, или когда он возбужден. В ходе решения находились рассеянные поля в конфигурационном пространстве как функции реальных пространственно-временных координат x и t . Наш подход к расчету аналогичен использованному в [Valente12a], где исследовалось вынужденное излучение в полу-бесконечном волноводе, и в [Mukhopadhyay24], где тот же метод был развит для описания динамики цепи колебаний цепочки из N кубитов.

Данная задача по рассеянию на возбужденном кубите имеет важный прикладной аспект. В квантовых схемах детектирование состояния кубита в результате возбуждения импульсом необходимо для работы квантовых гейтов. Если кубит находится в высокочастотном резонаторе, эта проблема давно решена. Взаимодействие кубита с резонатором приводит к дисперсионному сдвигу частоты резонатора, величина и направление которого относительно частоты пустого резонатора зависят от состояния кубита [Blais21]. Таким образом, измеряя частотный спектр резонатора, можно определить состояние кубита неразрушающим способом. Однако надежное определение состояния кубита в открытом волноводе остается во многом нерешенной проблемой. В этом случае состояние кубита можно определить только путем анализа рассеянного на кубите фотонного импульса.

Кроме того, изучение процесса рассеяния фотонного импульса на возбужденном кубите можно рассматривать с точки зрения процесса вынужденного излучения – т. е. когда падающий фотон вынуждает кубит распасться и высветить второй фотон, аналогичный первому по частоте и направлению движения, как было оговорено ранее. Данная задача также имеет большое прикладное значение для квантовой оптики, квантовой информатики, и микроволновой фотоники.

Глава организована следующим образом. В разделе 3.2 представлено общее описание рассматриваемой системы. Записан гамильтониан в частотной области и произведен его перевод в конфигурационное пространство, в котором и будет проводится расчет. В разделе 3.3 рассмотрен случай одного возбуждения, когда произвольный однофотонный импульс падает на невозбужденный кубит. Начиная с волновой функции системы, решается уравнение Шредингера и находятся общие аналитические выражения для амплитуд вероятностей всех состояний. Затем подробно были рассмотрены два конкретных случая начальных полей – падающая на кубит

монохроматическая волна, и гауссов импульс. В разделе 3.4 рассмотрен случай двух возбуждений, когда фотонное поле рассеивается на возбужденном кубите. Как и в предыдущем разделе, сначала было получено аналитическое решение в общем виде для произвольного фотонного поля, а затем были рассмотрены конкретные примеры для тех же начальных полей: монохроматической волны, и гауссова пакета. В данном же разделе проводится сравнение вероятностей возбуждения кубита для обоих случаев, и сделан подробный анализ двухфотонных состояний с точки зрения эффекта вынужденного излучения. Основные выводы по главе отражены в заключении 3.5. Некоторые математические выкладки вынесены в приложение Б.

3.2. Описание системы

Мы рассматриваем систему из одного кубита, помещенного в одномерный копланарный волновод (схожую с рис. 2.1 для $N = 1$). В общем случае она описывается гамильтонианом Джейнса-Каммингса (здесь и далее $\hbar = 1$):

$$H = \frac{\Omega}{2}(1 + \sigma_Z) + \int_{-\infty}^{+\infty} dk \, \omega(k) a^\dagger(k) a(k) + \int_{-\infty}^{+\infty} dk \, \omega(k) b^\dagger(k) b(k) + \int_{-\infty}^{+\infty} dk \, g(k) \left[(a^\dagger(k) + b^\dagger(k)) \sigma_- + (a(k) + b(k)) \sigma_+ \right]. \quad (3.2.1)$$

Мы взяли гамильтониан взаимодействия в приближении вращающейся волны. Ω это резонансная частота кубита, $\omega(k)$ – частота фотона k -ой моды, $a(k)$ и $b(k)$ – операторы уничтожения фотонов, двигающихся вправо (forward) и влево (backward) соответственно, $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$, $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ это операторы понижения и повышения состояния кубита. Коэффициент связи кубита с полем можно записать как [Domokos02]:

$$g(k) = \sqrt{\frac{\omega(k) d^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar S}}, \quad (3.2.2)$$

где дипольный момент сверхпроводящего кубита d задан в (1.3.3b), S — эффективное поперечное сечение мод в одномерном волноводе, ϵ_0 — электрическая постоянная. Размерность $g(k)$ есть частота $\times \text{м}^{1/2}$, а $\omega(k)$ в данном случае это частота моды распространяющегося фотонного поля, т.е. дисперсионное соотношение.

Аналогично предшествующим разделам, гамильтониан (3.2.1) записан в непрерывном пределе [Blow90]. Соответственно, коммутационные соотношения между фотонными операторами рождения и уничтожения имеют вид:

$$\left[a(k), a^\dagger(k') \right] = \left[b(k), b^\dagger(k') \right] = \delta(k - k'), \quad (3.2.3)$$

где $\delta(k)$ это дельта-функция Дирака. В таком случае фотонные операторы рождения и уничтожения имеют размерность $a(k), b(k) \sim 1/\sqrt{k}$.

По ряду причин производить расчеты и вывод уравнений мы будем в конфигурационном пространстве, задаваемом координатой x , иногда называемом реальным пространством (real-space) [Shen07b, Shen09, Mukhopadhyay24]. Для перехода из x -пространства в частотное k -пространство и обратно введем понятие преобразования Фурье для фотонных операторов:

$$c^\dagger(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx} c^\dagger(x), \quad c^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ikx} c^\dagger(k). \quad (3.2.4)$$

где $c = a, b$. Преобразованные таким образом фотонные операторы рожают или уничтожают фотон в точке x .

Из коммутационных соотношений (3.2.3) следует, что фотонные операторы в x -представлении подчиняются обычным коммутационным соотношениям:

$$\left[c(x), c^\dagger(x') \right] = \delta(x - x'), \quad \left[c(x), c(x') \right] = \left[c^\dagger(x), c^\dagger(x') \right] = 0, \quad (3.2.5)$$

и имеют размерность $a^\dagger(x), b^\dagger(x) \sim 1/\sqrt{x}$.

Будем считать, что дисперсионное соотношение для частоты $\omega(k)$ является линейным, т.е. $\omega(k) = k \cdot v_g$. Это условие можно оправдать в том случае, если резонансные частоты кубитов и фотонов далеко отстоят от частоты среза одномерного волновода [Shen07b]. Воспользовавшись этим условием и применив преобразование (3.2.4) к исходному гамильтониану (3.2.1), получим запись гамильтониана в конфигурационном пространстве [Shen09]:

$$\begin{aligned} H = & \Omega |e\rangle \langle e| - i v_g \int_{-\infty}^{+\infty} dx a^\dagger(x) \frac{\partial}{\partial x} a(x) + i v_g \int_{-\infty}^{+\infty} dx b^\dagger(x) \frac{\partial}{\partial x} b(x) \\ & + V \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) \left[\left(a^\dagger(x) + b^\dagger(x) \right) \sigma_- + \left(a(x) + b(x) \right) \sigma_+ \right]. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Здесь v_g это групповая скорость фотонов в волноводе, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Преобразованный коэффициент связи V получается из фурье-образа (3.2.2):

$$g(x) = V \delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) e^{ikx}. \quad (3.2.7)$$

Здесь применяется логичное предположение, что коэффициент связи $g(x)$ отличен от нуля только в той точке, где расположен кубит. Формально такое соотношение получится, если в (3.2.7)

считать $g(k)$ константой, взятой, например, на резонансной частоте: $g(k) \approx g(\Omega)$, что соответствует марковскому приближению [Shen09, Gardiner85]. Тогда получаем, что:

$$g(x) = V\delta(x) \equiv \sqrt{2\pi}g(\Omega)\delta(x), \quad (3.2.8)$$

где:

$$V = \left(\frac{\Omega d^2}{2\varepsilon_0 \hbar A} \right)^{1/2}. \quad (3.2.9)$$

Размерность преобразованного коэффициента должна быть прямо пропорциональна частоте и корню из координаты: $V \sim \omega \times \sqrt{x}$. В дальнейших расчетах мы будем использовать гамильтониан в конфигурационном пространстве (3.2.6) с коэффициентом связи (3.2.9).

3.3. Подпространство с одним возбуждением

Сначала сделаем расчет для простого случая одного возбуждения, когда в волноводе присутствует фотон и невозбужденный кубит, либо возбужденный кубит без фотона. Поскольку гамильтониан (3.2.6) сохраняет количество возбуждений (количество фотонов + количество возбужденных кубитов), то в любой момент времени система остается в подпространстве с одним возбуждением. Также стоит отметить, что в таком случае гильбертово пространство ограничено в соответствии с количеством фотонов, в то время как полный набор мод в континууме – нет.

В случае подпространства с одним возбуждением, возможны несколько начальных условий которые мы рассмотрим: 1) кубит возбужден, а падающего поля нет – элементарный случай спонтанного распада одиночного кубита, который мы затронем в нашем выводе, но не будем рассматривать его подробно; 2) кубит в основном состоянии, на который падает фотон в виде монохроматической волны; 3) кубит в основном состоянии, на который падает фотон в виде гауссова пакета;

Полученные в этом разделе результаты нельзя считать полноценно новыми, их можно найти, например, в [Shen05a, Shen05b] для монохроматической волны или в [Chen11] для гауссова импульса, но рассчитанные другим методом. Тем не менее, полный разбор одного возбуждения позволил нам убедиться в адекватности применяемого метода из работы [Mukhopadhyay24], разработанного для описания многофотонных раби колебаний, а не для изучения фотонных спектров. Кроме того, далее мы проведем сравнение результатов для одного и двух возбуждений, чтобы попытаться найти отличие в спектрах рассеяния фотона на возбужденном кубите и на кубите в основном состоянии.

3.3.1 Решение в общем виде

Для одного возбуждения волновая функция в x -представлении имеет следующий вид:

$$|\Psi(t)\rangle_1 = e(t)e^{-i\Omega t}|e, 0\rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x, t)a^\dagger(x)|g, 0\rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} dx g(x, t)b^\dagger(x)|g, 0\rangle, \quad (3.3.1)$$

где амплитуды $f(x, t)$ и $g(x, t)$ соответствуют полям, распространяющимся направо и налево, а амплитуда $e(t)$ соответствует возбужденному кубиту. Поскольку имеет место непрерывное распределение по пространству [Blow90], то фотонные амплитуды имеют размерность $1/\sqrt{x}$, как и фотонные операторы $a^\dagger(x)$, $b^\dagger(x)$. Нормировку волновой функции в данном случае можно записать как:

$$|e(t)|^2 + \int_{-L/2}^{+L/2} dx |f(x, t)|^2 + \int_{-L/2}^{+L/2} dx |g(x, t)|^2 = 1, \quad (3.3.2)$$

где L это длина волновода, которая в непрерывном пределе, вообще говоря, должна стремиться к бесконечности.

Плотность вероятности обнаружить фотон в точке x и в момент времени t ,двигающийся вправо (влево), есть:

$$p_{g,R}(x, t) = |f(x, t)|^2, \quad p_{g,L}(x, t) = |g(x, t)|^2. \quad (3.3.3)$$

Соответственно, мы также можем найти вероятность обнаружить возбужденный кубит, и полные вероятности обнаружить правый (левый) фотон как:

$$P_{e,0}(t) = |e(t)|^2, \quad P_{g,R}(t) = \int_{-L/2}^{+L/2} dx |f(x, t)|^2, \quad P_{g,L}(t) = \int_{-L/2}^{+L/2} dx |g(x, t)|^2. \quad (3.3.4)$$

Формулы (3.3.4) не зависят от x , поэтому $P_{g,R}$ ($P_{g,L}$) есть просто вероятность обнаружить фотон,двигающийся вправо (влево) в любой возможной точке пространства волновода.

Используя уравнение Шрёдингера с гамильтонианом (3.2.6) и волновой функцией (3.3.1), получим набор уравнений движения для трех амплитуд вероятности:

$$\frac{d}{dt} e(t) = -iV e^{i\Omega t} (f(0, t) + g(0, t)), \quad (3.3.5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + v_g \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) = -iV \delta(x) e^{-i\Omega t} e(t), \quad (3.3.5b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x, t) - v_g \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) = -iV \delta(x) e^{-i\Omega t} e(t), \quad (3.3.5c)$$

Теперь, чтобы найти формальное решение для фотонной части, необходимо перевести амплитуды в k -пространство. Сделаем это с помощью следующего фурье-преобразования:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} \bar{f}(k, t), \quad g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} \bar{g}(k, t), \quad (3.3.6a)$$

$$\bar{f}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} f(x, t), \quad \bar{g}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} g(x, t). \quad (3.3.6b)$$

Подставляя (3.3.6a) в (3.3.5b-3.3.5c) и раскрывая дельта-функцию через интегральное представление как $\delta(x) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(k, t) + ikv_g \bar{f}(k, t) = -i \frac{V}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\Omega t} e(t), \quad (3.3.7a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{g}(k, t) - ikv_g \bar{g}(k, t) = -i \frac{V}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\Omega t} e(t). \quad (3.3.7b)$$

Формальное решение (3.3.7) есть:

$$\bar{f}(k, t) = \bar{f}(k, 0) - i \frac{V}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t dt' e(t') e^{-i\Omega t'} e^{-ikv_g(t-t')}, \quad (3.3.8a)$$

$$\bar{g}(k, t) = -i \frac{V}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t dt' e(t') e^{-i\Omega t'} e^{ikv_g(t-t')}, \quad (3.3.8b)$$

где предполагается, что начальный фотон всегда падает на кубит слева направо, в прямом направлении. Переходя обратно к x -представлению через (3.3.6b), получим:

$$f(x, t) = f_0(x - v_g t) - iV \int_0^t dt' e(t-t') e^{-i\Omega(t-t')} \delta(x - v_g t'), \quad (3.3.9a)$$

$$g(x, t) = -iV \int_0^t dt' e(t-t') e^{-i\Omega(t-t')} \delta(x + v_g t'). \quad (3.3.9b)$$

$f_0(x - v_g t)$ представляет собой значение падающего на кубит фотонного поля в начальный момент времени, записанное в координатном представлении. Вычисляя интегралы в уравнениях (3.3.9), окончательно находим:

$$f(x, t) = f_0(x - v_g t) - i \frac{V}{v_g} e\left(t - \frac{x}{v_g}\right) e^{-i\Omega\left(t - \frac{x}{v_g}\right)} \theta(x) \theta\left(t - \frac{x}{v_g}\right), \quad (3.3.10a)$$

$$g(x, t) = -i \frac{V}{v_g} e\left(t + \frac{x}{v_g}\right) e^{-i\Omega\left(t + \frac{x}{v_g}\right)} \theta(-x) \theta\left(t + \frac{x}{v_g}\right), \quad (3.3.10b)$$

где $\theta(x)$ это тета-функция Хэвисайда, $\theta(x > 0) = 1$, $\theta(x < 0) = 0$. Чтобы избежать скачка в точке $x = 0$, мы принимаем обычное условие $\theta(x = 0) = 1/2$.

Для нахождения кубитной амплитуды нам понадобятся фотонные значения в точке $x = 0$:

$$f(0,t) = f_0(-v_g t) - i \frac{V}{2v_g} e(t) e^{-i\Omega t}, \quad (3.3.11a)$$

$$g(0,t) = -i \frac{V}{2v_g} e(t) e^{-i\Omega t}. \quad (3.3.11b)$$

Подставляя (3.3.11) в (3.3.5a), получим:

$$\frac{d}{dt} e(t) = -iV e^{i\Omega t} f_0(-v_g t) - \Gamma e(t). \quad (3.3.12)$$

где введено стандартное понятие скорости спонтанного распада как $\Gamma = V^2 / v_g$.

Если начальное фотонное поле равно нулю, $f_0(-v_g t) = 0$, то решение уравнения (3.3.12) будет представлять собой тривиальный случай спонтанного распада возбужденного кубита со скоростью Γ : $e(t) = e(0)e^{-\Gamma t}$. Однако, нас в первую очередь интересует рассеяние фотона на кубите, так что для одного возбуждения мы будем предполагать, что кубит в начальный момент времени находится в основном состоянии, т.е. $e(0) = 0$. Общее решение в таком случае можно записать как:

$$e(t) = -iV e^{-\Gamma t} \int_0^t d\tau e^{(i\Omega + \Gamma)\tau} f_0(-v_g \tau). \quad (3.3.13)$$

Подставляя это решение в выражения (3.3.10), получим и общий вид решения для фотонных амплитуд:

$$f(x,t) = f_0(x - v_g t) - \Gamma \theta(x) \theta\left(t - \frac{x}{v_g}\right) e^{-(i\Omega + \Gamma)(t - x/v_g)} \int_0^{t - x/v_g} d\tau e^{(i\Omega + \Gamma)\tau} f_0(-v_g \tau), \quad (3.3.14a)$$

$$g(x,t) = -\Gamma \theta(-x) \theta\left(t + \frac{x}{v_g}\right) e^{-(i\Omega + \Gamma)(t + x/v_g)} \int_0^{t + x/v_g} d\tau e^{(i\Omega + \Gamma)\tau} f_0(-v_g \tau), \quad (3.3.14b)$$

Далее, рассмотрим конкретные примеры начального поля.

3.3.2 Начальное поле в виде монохроматической волны

Возьмем в качестве начального состояния поле в виде бегущей слева направо монохроматической волны:

$$f_0(x - v_g t) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_0(x - v_g t)} = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i\omega_0\left(t - \frac{x}{v_g}\right)}, \quad (3.3.15)$$

где L это длина волновода, и $\omega_0 = k_0/v_g$ – частота падающей волны. Начальное поле в таком виде удовлетворяет условию нормировки (3.3.2). Кубитная амплитуда (3.3.13) в таком случае будет равна:

$$e(t) = \sqrt{\frac{\Gamma v_g}{L}} \frac{e^{-i(\omega_0 - \Omega)t} - e^{-\Gamma t}}{\omega_0 - \Omega + i\Gamma}. \quad (3.3.16)$$

Корень перед дробью имеет размерность частоты, так что амплитуда (3.3.16) безразмерна, как и должно быть. Легко также сразу вычислить вероятность обнаружить кубит в возбужденном состоянии:

$$P_{e,0}(t) = |e(t)|^2 = \frac{\Gamma v_g}{L} \frac{1}{(\omega_0 - \Omega)^2 + \Gamma^2} \left(1 + e^{-2\Gamma t} - 2e^{-\Gamma t} \cos[(\omega_0 - \Omega)t] \right). \quad (3.3.17)$$

Как видно из (3.3.17), если формально устремить время к бесконечности, то вероятность возбуждения кубита будет стремиться не к нулю, а к некоторому постоянному значению. Кроме того, она существенно зависит от безразмерного параметра $v_g / \Gamma L$. Так, если взять падающее поле на резонансной частоте ($\omega_0 = \Omega$), то $P_{e,0}(t \rightarrow \infty) = |e(t \rightarrow \infty)|^2 = v_g / \Gamma L$. В принципе эта величина может принимать любое значение, в том числе и больше единицы. Например, для типичных параметров сверхпроводящих цепей $\Gamma/2\pi = 10$ МГц, $L = 1$ м, $v_g = 3 \times 10^8$ м/с, получим $|e(t \rightarrow \infty)|^2 \approx 4,7$. Такой нефизический результат связан с выходом за рамки модели – если не ограничивать время в нашей задаче, то излучение может по факту выйти за пределы волновода во внешнее пространство. Таким образом, нужно считать, что время не может быть больше, чем время прохождения сигнала вдоль всего волновода $\tau = L / v_g$. Поскольку бесконечная в пространстве монохроматическая волна является некоторой идеализацией, то ее можно аппроксимировать гауссовым пакетом, пространственная ширина которого Δx сравнима с размерами волновода L . Тогда очевидно, что все процессы в системе происходят в течение времени, которое требуется пакету, чтобы пройти весь волновод; в данном случае это время порядка $\Delta x / v_g$. Поэтому, далее динамику монохроматической волны мы будем рассматривать на временном отрезке $0 < t \leq \tau = L / v_g$. При этом вероятность возбуждения кубита никогда не превысит единицу.

На рисунке 3.1 представлен анализ вероятности возбуждения кубита резонансным фотоном. При приведении (3.3.17) к безразмерному виду возникает некоторый параметр $\Gamma\tau$, который можно интерпретировать как время прохождения фотоном всей длины волновода в единицах Γ . Поскольку скорость распространения полей в волноводе мы считаем фиксированной величиной, близкой к скорости света в вакууме, изменяя этот параметр, мы фактически

выставляем различную длину волновода. В соответствии с этим можно выделить три основных случая, показанных на рис. 3.1 разными линиями: 1) краткое взаимодействие, $\Gamma\tau \ll 1$ (синяя линия на рис. 3.1). В этом случае, фотон проходит волновод слишком быстро, чтобы успеть возбудить кубит. 2) долгое взаимодействие $\Gamma\tau \gg 1$ (зеленая линия на рис. 3.1). В этом случае фотон находится в волноводе достаточно долго, чтобы возбужденный кубит перешел в некоторое стационарное состояние. 3) время прохождения волны через волновод сопоставимо со временем распада кубита, $\Gamma\tau \sim 1$ (красная линия на рис. 3.1). Это наиболее эффективный случай взаимодействия фотона с кубитом.

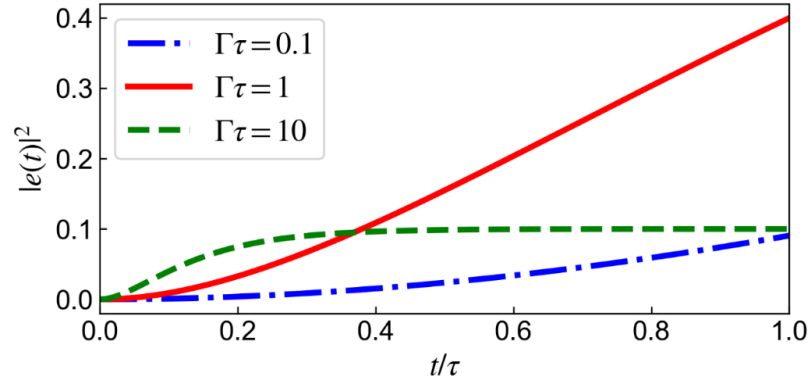


Рис. 3.1. Вероятность возбуждения кубита (3.3.17) для разных значений безразмерного параметра $\Gamma\tau$, определяющего “скорость” взаимодействия, или длину волновода L . Максимум вероятности $|e(t)|_{\max}^2 \approx 0,4$ наблюдается в случае, когда время прохождения волны через весь волновод равно времени жизни кубита: $L/v_g = \tau = 1/\Gamma$. Остальные параметры системы: $\Gamma/\Omega = 0,02$, $\delta_0 = (\omega_0 - \Omega)/\Omega = 0$.

Из рисунка 3.1 видно, что максимальная вероятность возбуждения кубита $|e(t)|_{\max}^2 = 0,4$ наблюдается в случае, когда время прохождения волны через весь волновод равно периоду скорости спонтанного излучения $L/v_g = \tau = 1/\Gamma$ (красная сплошная линия на рис. 3.1). Интересно, что это же максимальное значение вероятности возбуждения кубита наблюдается и при рассеянии на кубите гауссова пакета при $\Gamma\Delta x/v_g = 1$ [Chen11]. Для других случаев, показанных на рис. 3.1, вероятность не превышает $|e(t)|^2 \approx 0,1$: либо время прохождения фотона слишком мало (синяя линия), либо наоборот велико (зеленая линия).

Теперь рассмотрим выражения для фотонных амплитуд. В случае начального поля (3.3.15), получаем:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i\omega_0(t-x/v_g)} - \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{i\Gamma}{\omega_0 - \Omega + i\Gamma} \left(e^{-i\omega_0(t-x/v_g)} - e^{-(i\Omega + \Gamma)(t-x/v_g)} \right) \theta(x) \theta\left(t - \frac{x}{v_g}\right), \quad (3.3.18a)$$

$$g(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{L}} \frac{i\Gamma}{\omega_0 - \Omega + i\Gamma} \left(e^{-i\omega_0(t+x/v_g)} - e^{-(i\Omega + \Gamma)(t+x/v_g)} \right) \theta(-x) \theta\left(t + \frac{x}{v_g}\right). \quad (3.3.18b)$$

Отметим, что здесь тета-функции разграничивают амплитуды по разным областям волновода относительно положения кубита $x = 0$: если $x > 0$, то отраженная волна $g(x, t) = 0$, а если $x < 0$, то проходящая волна $f(x, t)$ равна падающей волне, как и должно быть.

Вообще говоря, данные фотонные амплитуды тоже нужно считать для ограниченного времени $t < \tau$. Тем не менее, если все же устремить в (3.3.18) время на бесконечность, то мы получим известный результат для прошедшей и отраженной волн, который выводится из стационарной теории рассеяния [Shen05a, Shen05b]:

$$f(x, t \rightarrow \infty) = \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{\omega_0 - \Omega + i\Gamma - i\Gamma \theta(x)}{\omega_0 - \Omega + i\Gamma} e^{-i\omega_0(t-x/v_g)}, \quad (3.3.19a)$$

$$g(x, t \rightarrow \infty) = -\frac{1}{\sqrt{L}} \frac{i\Gamma \theta(-x)}{\omega_0 - \Omega + i\Gamma} e^{-i\omega_0(t+x/v_g)}. \quad (3.3.19b)$$

Как было отмечено в (3.3.3), квадрат модуля фотонных амплитуд позволяет нам найти плотность вероятности для точки x и момента времени t . Поскольку амплитуды (3.3.18) содержат тета-функции, квадрат модуля правой волны в случае, если детектор сигнала находится слева от кубита, т.е. для $x < 0$ есть просто $L |f(x < 0, t)|^2 = 1$. В общем случае же можем записать:

$$p_{g,R}(x, t) = |f(x, t)|^2 = \frac{1}{L} + \frac{1}{L} \frac{\Gamma^2 \theta(x) \theta(t - x/v_g)}{(\omega_0 - \Omega)^2 + \Gamma^2} \times \left[e^{-2\Gamma(t-x/v_g)} - 1 - 2 \frac{(\omega_0 - \Omega)}{\Gamma} \sin\left((\omega_0 - \Omega) \left(t - \frac{x}{v_g}\right)\right) e^{-\Gamma(t-x/v_g)} \right]. \quad (3.3.20a)$$

Для левой волны в случае положительного x , когда детектор стоит справа от кубита, мы получим нулевой результат, как и должно быть. В общем случае имеем:

$$p_{g,L}(x, t) = |g(x, t)|^2 = \frac{1}{L} \frac{\Gamma^2 \theta(-x) \theta(t + x/v_g)}{(\omega_0 - \Omega)^2 + \Gamma^2} \left(1 + e^{-2\Gamma(t+x/v_g)} - 2 \cos\left((\omega_0 - \Omega) \left(t + \frac{x}{v_g}\right)\right) e^{-\Gamma(t+x/v_g)} \right). \quad (3.3.20b)$$

Взяв квадрат модуля от (3.3.18) и вычислив интеграл по x в соответствии с (3.3.4), найдем вероятности обнаружить движущийся вправо (влево) фотон во всем пространстве волновода:

$$P_{g,R}(t) = 1 - \frac{\nu_g}{L} \frac{\Gamma^2}{\delta_0^2 + \Gamma^2} \left[t + \frac{1}{2\Gamma} (e^{-2\Gamma t} - 1) + \frac{2}{\Gamma} \frac{\delta_0^2}{\delta_0^2 + \Gamma^2} - \frac{2e^{-\Gamma t} \delta_0}{\delta_0^2 + \Gamma^2} \left(\sin(\delta_0 t) + \frac{\delta_0}{\Gamma} \cos(\delta_0 t) \right) \right], \quad (3.3.21a)$$

$$P_{g,L}(t) = \frac{\nu_g}{L} \frac{\Gamma^2}{\delta_0^2 + \Gamma^2} \left[t - \frac{1}{2\Gamma} (e^{-2\Gamma t} - 1) - \frac{2\Gamma}{\delta_0^2 + \Gamma^2} + \frac{2e^{-\Gamma t}}{\delta_0^2 + \Gamma^2} (\Gamma \cos(\delta_0 t) - \delta_0 \sin(\delta_0 t)) \right], \quad (3.3.21b)$$

где для упрощения записи введен параметр расстройки падающего поля $\delta_0 = \omega_0 - \Omega$.

Если взять сумму всех вероятностей (3.3.21) и (3.3.17) то можно убедиться, что она равна единице, а значит условие нормировки (3.3.2) выполняется для любых параметров системы. Также следует отметить, что эволюция вероятностей (3.3.21) выполняется только в пределе $t < \tau = L / \nu_g$. Для больших времен вероятности имеют нефизические значения, превышающие единицу (см. обсуждение этого вопроса под выражением (3.3.17)).

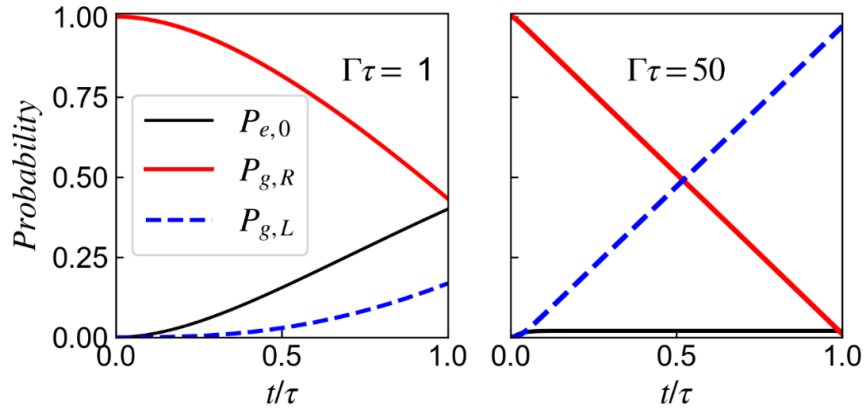


Рис. 3.2. Вероятности обнаружить возбужденный кубит (черная сплошная линия), движущийся вправо фотон (красная сплошная линия), либо движущийся влево фотон (синяя пунктирная линия), построенные по формулам (3.3.17) и (3.3.21). При очень большом значении $\Gamma \tau = 50$ (правый график) в конце временного интервала кубит работает почти как идеальное зеркало, отражая падающую волну практически без поглощения. Остальные параметры системы: $\Gamma / \Omega = 0,02$; $\delta_0 = (\omega_0 - \Omega) / \Omega = 0$.

Временная зависимость вероятностей обнаружения фотонов (3.3.21) и возбужденного кубита (3.3.17) показана на рисунке 3.2. Интересная особенность, проявляющаяся на этих графиках, это то, что фотонные поля начинают «чувствовать» кубит при $t \ll \tau$, то есть с самого начала. Простое объяснение этого эффекта состоит в том, что монохроматическая волна существует в любое время во всех точках пространства. Однако реальная волна должна быть ограничена. Если мы аппроксимируем монохроматическую волну широким гауссовым пакетом

с пиком, изначально расположенным в точке $x = -L/2$, и правый хвост которого касается кубита в точке $x = 0$, то очевидно, что фотонное поле должно «чувствовать» кубит задолго до того, как пик пакета достигнет точки $x = 0$.

Также из рис. 3.2 видно, что для параметра $\Gamma\tau = 1$ деструктивная интерференция за пределами кубита не является полной: на границе временного интервала $t = \tau$ прошедшая амплитуда не равна нулю, а отраженная амплитуда не равна единице. Однако для "медленного" света при $\Gamma\tau = 50$ мы наблюдаем полную деструктивную интерференцию: в граничное время $t = \tau$ прошедшая амплитуда близка к нулю, а отраженная амплитуда близка к единице. В этом случае амплитуда кубита очень мала: с большой долей вероятности кубит остается в основном состоянии. Фактически, это есть результат (3.3.19) стационарной теории: для резонансного фотона ($\omega_0 = \Omega$) кубит работает как идеальное зеркало, полностью отражая падающую волну в момент времени $t = \tau$.

3.3.3 Начальное поле – гауссов импульс

В стандартном частотном представлении гауссов пакет имеет следующий вид:

$$\gamma_0(\omega) = \left(\frac{2}{\pi\Delta^2} \right)^{1/4} e^{i(\omega-\omega_s)\frac{x_0}{v_g}} e^{-\frac{(\omega-\omega_s)^2}{\Delta^2}}, \quad (3.3.22)$$

где ω_s это центральная частота импульса, Δ это ширина пакета в частотной области, а x_0 – расстояние, на котором находится от кубита центральный пик импульса в начальный момент $t = 0$. С помощью преобразования Фурье можно найти аналогичное представление гауссова импульса в x -пространстве [Greenberg18]:

$$U_0(x - v_g t) = \left(\frac{2}{\pi\Delta_x^2} \right)^{1/4} e^{ik_s(x - v_g t)} e^{-\frac{(x + x_0 - v_g t)^2}{\Delta_x^2}}, \quad (3.3.23)$$

где $\Delta_x = 2v_g / \Delta$ это полуширина пакета в пространстве, $k_s = \omega_s / v_g$.

Подставляя (3.3.23) в решение для кубитной амплитуды (3.3.13), получим:

$$e(t) = -i\sqrt{\Gamma v_g} \left(\frac{2}{\pi\Delta_x^2} \right)^{1/4} e^{-\Gamma t} \int_0^t d\tau e^{(i\Omega - i\omega_s + \Gamma)\tau} e^{-\frac{(x_0 - v_g \tau)^2}{\Delta_x^2}}. \quad (3.3.24)$$

Для фотонных амплитуд, в этом случае, находим:

$$f(x,t) = \left(\frac{2}{\pi \Delta_x^2} \right)^{1/4} e^{-i\omega_S \left(t - \frac{x}{v_g} \right)} e^{-\frac{(x+x_0-v_g t)^2}{\Delta_x^2}} \quad (3.3.25a)$$

$$- \Gamma \left(\frac{2}{\pi \Delta_x^2} \right)^{1/4} \theta(x) \theta \left(t - \frac{x}{v_g} \right) e^{-(i\Omega + \Gamma)(t - x/v_g)} \int_0^{t - x/v_g} d\tau e^{(i\Omega - i\omega_S + \Gamma)\tau} e^{-\frac{(x_0 - v_g \tau)^2}{\Delta_x^2}},$$

$$g(x,t) = - \Gamma \left(\frac{2}{\pi \Delta_x^2} \right)^{1/4} \theta(-x) \theta \left(t + \frac{x}{v_g} \right) e^{-(i\Omega + \Gamma)(t + x/v_g)} \times \int_0^{t + x/v_g} d\tau e^{(i\Omega - i\omega_S + \Gamma)\tau} e^{-\frac{(x_0 - v_g \tau)^2}{\Delta_x^2}}. \quad (3.3.25b)$$

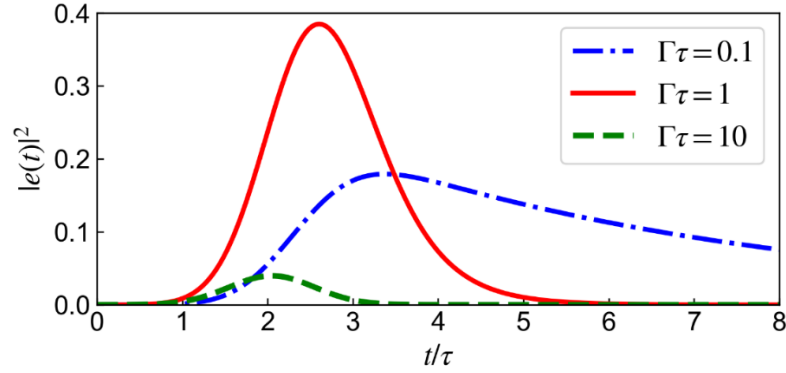


Рис. 3.3. Вероятность возбуждения кубита гауссовым импульсом для разных значений параметра $\Gamma\tau = \Gamma\Delta_x/v_g$, построенная по формуле (3.3.24). Максимум возбуждения наблюдается, когда ширина импульса в частотной области равна скорости спонтанного излучения, $\Delta = \Gamma$ (красная линия). Остальные параметры: $\Gamma/\Omega = 0,02$; $\delta_0 = (\omega_0 - \Omega)/\Omega = 0$; $x_0/\Delta_x = 5$.

На рисунке 3.3 представлен анализ вероятности возбуждения кубита гауссовым импульсом. Как и в случае с монохроматической волной, эта вероятность существенно зависит от безразмерного параметра $\Gamma\tau$, но теперь $\tau = \Delta_x/v_g$ это время прохождения половины гауссова пакета. Здесь так же справедливы три возможных случая, описанных в предыдущем пункте: 1) быстрое взаимодействие $\Gamma\tau \ll 1$; 2) медленное взаимодействие $\Gamma\tau \gg 1$; 3) и промежуточный случай $\Gamma\tau \sim 1$; Но стоит учитывать, что если раньше эти режимы можно было интерпретировать как разную длину волновода L , то теперь этот параметр связан с шириной гауссова пакета в пространстве Δ_x . Как уже упоминалось выше, максимум вероятности возбуждения кубита

$|e(t)|_{\max}^2 \approx 0,4$ (красная линия на рис. 3.3) соответствует ширине пакета в частотном пространстве, равной скорости спонтанного излучения, $\Delta = \Gamma$ [Chen11].

Кроме того, важную роль для эволюции возбуждения кубита играет начальное положение импульса x_0 . Как видно из рис. 3.3, кубит начинает возбуждаться только когда правое крыло импульса доходит до точки $x = 0$, где и расположен кубит. Когда же импульс проходит дальше по волноводу, вероятность возбуждения кубита падает, что соответствует процессу спонтанного распада. При увеличении параметра $\Gamma\tau$ пик возбуждения смещается ближе к положению $t = x_0 / v_g$ и становится уже (зеленая пунктирная линия на рис. 3.3); при уменьшении $\Gamma\tau$ наоборот – максимум отдаляется от точки $t = x_0 / v_g$ и линия становится шире (синяя линия штрих-пунктирная линия на рис. 3.3), что свидетельствует о том что взаимодействие фотона с кубитом происходит более «медленно».

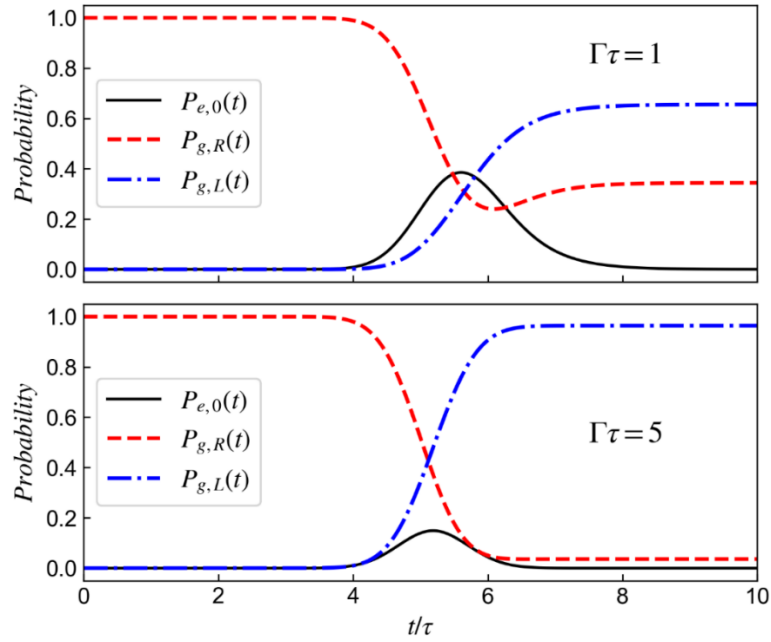


Рис. 3.4. Вероятности обнаружить возбужденный кубит $P_{e,0}(t) = |e(t)|^2$ (черная сплошная линия), фотон движущийся вправо $P_{g,R}(t) = \int |f(x,t)|^2 dx$ (красная пунктирная линия) или фотон движущийся влево $P_{g,L}(t) = \int |g(x,t)|^2 dx$ (синяя штрих-пунктирная линия), найденные с помощью (3.3.24) и (3.3.25). При увеличении параметра $\Gamma\tau$, т.е. при увеличении полуширины гауссова пакета в пространстве Δx , область взаимодействия с кубитом (от 4 до 6) начинает напоминать аналогичные графики для монохроматической волны (сравни с рис. 3.2). Остальные параметры: $\Gamma / \Omega = 0,02$; $\delta_0 = (\omega_0 - \Omega) / \Omega = 0$; $x_0 / \Delta_x = 5$.

На рисунке 3.4 представлен анализ вероятностей обнаружения фотона – движущегося слева направо (красная пунктирная линия), или справа налево (синяя штрих-пунктирная линия). Вероятность возбуждения кубита показана черной сплошной линией.

Из верхнего графика рис. 3.4 видно, что в момент времени $t \approx x_0 / v_g = 5\tau$, т.е. когда центральный пик гауссова импульса доходит до кубита, вероятность прохождения сигнала плавно снижается, в то время как вероятность возбуждения кубита или отражения пакета, наоборот, увеличиваются. После прохождения гауссова пакета вероятность возбуждения кубита снова опускается до нуля, и система переходит в некое подобие стационарного режима, когда вероятности обнаружить правый (левый) фотон остаются постоянными с течением времени. Значения, на которые по итогу выходят вероятности, сильно зависят от параметра $\Gamma\tau$, что отчетливо видно из нижнего графика рис. 3.4.

Стоит также отметить, что область взаимодействия гауссова импульса с кубитом, т.е. время, за которое импульс полностью пересекает точку $x = 0$, совпадает с результатами для монохроматической волны с рис. 3.2. Это полностью коррелирует со сделанным нами выше предположением, что монохроматическую волну можно рассматривать как гауссов пакет с шириной импульса, равной длине волновода $\Delta_x = L$.

То, как гауссов импульс рассеивается в пространстве, можно проанализировать, если построить квадрат модуля (3.3.25) для конкретных моментов во времени. Такое распределение продемонстрировано на рисунке 3.5 для разных параметров $\Gamma\tau$. Когда время $t < x_0 / v_g$, мы наблюдаем только падающий пакет слева от кубита (верхние панели). Когда проходит достаточно времени, $t \sim x_0 / v_g$, импульс достигает кубита и начинает разделяться на две волны – прошедшую и отраженную (средние панели). Затем, когда $t > x_0 / v_g$, прошедшая и отраженная волны расходятся от центра в разные стороны, и мы можем наблюдать пространственную форму рассеянных полей (нижние панели).

В случае промежуточного значения $\Gamma\tau = 1$ (рис. 3.5b) рассеянный гауссов импульс имеет почти одинаковую вероятность отразиться от кубита или пройти через него, хотя пространственные распределения имеют совершенно разные формы. Этот результат полностью совпадает с результатами в [Chen11]. С другой стороны, если взаимодействие происходит быстро, $\Gamma\tau = 0,2$ (рис. 3.5a), гауссов импульс почти полностью проходит через кубит без особых изменений в форме линии. Для медленного взаимодействия $\Gamma\tau = 5$ мы наблюдаем противоположную картину – падающий гауссов импульс почти полностью отражается в обратном направлении с очень малой долей прошедшего сигнала (рис. 3.5c). Таким образом, мы еще раз подтвердили полученный для монохроматической волны результат: при больших

значениях $\Gamma\tau \gg 1$ кубит начинает напоминать идеальное зеркало, полностью отражающее падающие резонансные фотоны.

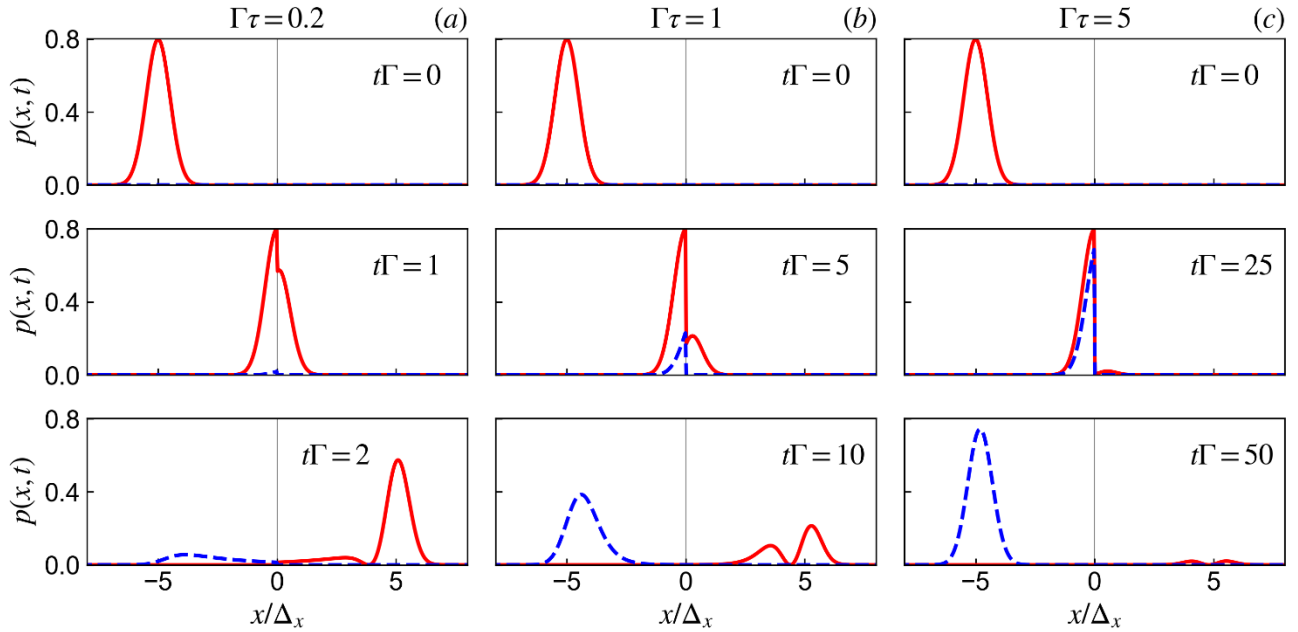


Рис. 3.5. Пространственное распределение (при фиксированном t) фотонных полей, распространяющихся вперед $p_{g,R}(x) = \Delta_x |f(x)|^2$ (красная сплошная линия) и назад $p_{g,L}(x) = \Delta_x |g(x)|^2$ (синяя сплошная линия), найденное с помощью (3.3.25) для различной “скорости” взаимодействия: (a) $\Gamma\tau = 0,2$; (b) $\Gamma\tau = 1$; (c) $\Gamma\tau = 5$. На всех верхних графиках при $t = 0$ отображен только начальный импульс. Графики в середине соответствуют моменту во времени, когда центр гауссова импульса достигает местоположения кубита. На нижних графиках импульс уже провзаимодействовал с кубитом, в результате чего возникают две волны, отраженная (синяя) и прошедшая (красная). При малых значениях $\Gamma\tau = 0,2$ падающий импульс практически полностью проходит через кубит, а при больших $\Gamma\tau = 5$ полностью отражается от него. Другие параметры: $\Gamma/\Omega = 0,02$; $\delta_0 = (\omega_0 - \Omega)/\Omega = 0$; $x_0/\Delta_x = 5$.

3.4. Подпространство с двумя возбуждениями

Теперь рассмотрим более сложную задачу, а именно рассеяние падающего фотона на возбужденном кубите. В этом случае необходимо учитывать, что в системе одновременно будет существовать два возбуждения: либо имеется один фотон и возбужденный кубит, либо два

фотона и кубит в основном состоянии. В данном подходе не учтено нерadiационное затухание, а значит конечным состоянием системы всегда будет наличие двух фотонов, поскольку возбужденный кубит спонтанно распадается в основное состояние и соответственно излучает фотон. Анализ данного случая интересен с точки зрения процесса вынужденного излучения [Rephaeli12], вызванного однофотонным импульсом, а также определения состояния кубита не в резонаторе, а в открытом волноводе.

3.4.1. Общее решение в случае рассеяния на возбужденном кубите

Для двух возбуждений волновая функция имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle_2 = & \int dx \beta_R(x,t) e^{-i\Omega t} a^\dagger(x) |e, 0\rangle + \int dx \beta_L(x,t) e^{-i\Omega t} b^\dagger(x) |e, 0\rangle \\ & + \iint dx dx' \gamma_{R,R}(x, x', t) a^\dagger(x) a^\dagger(x') |g, 0\rangle + \iint dx dx' \gamma_{L,L}(x, x', t) b^\dagger(x) b^\dagger(x') |g, 0\rangle \\ & + 2 \iint dx dx' \gamma_{R,L}(x, x', t) a^\dagger(x) b^\dagger(x') |g, 0\rangle. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

где индексы R и L соответствуют полям, распространяющимся направо и налево. Первые два члена отвечают за возбужденный кубит и один фотон, а оставшиеся три – за два фотона и кубит в основном состоянии.

В последней строчке (3.4.1) амплитуда $\gamma_{R,L}(x, x', t)$ имеет удвоенное значение. Это связано с тем, что фотоны, являясь бозонами, есть неразличимые частицы. Из этого можно сделать два вывода. Во-первых, если оба фотона двигаются в одном направлении, то мы не можем выделить какой из них “первый”, а какой “второй”. Важно лишь то, что один из них (неважно какой) находится в точке x , а второй – в точке x' . Во-вторых, если фотоны двигаются в разных направлениях, то просто переставить индексы x и x' уже нельзя. Тем не менее, симметрия между этими состояниями должна сохраняться. Оба этих вывода можно записать в виде следующих тождеств:

$$\begin{aligned} \gamma_{R,R}(x, x', t) &= \gamma_{R,R}(x', x, t), & \gamma_{L,L}(x, x', t) &= \gamma_{L,L}(x', x, t), \\ \gamma_{R,L}(x, x', t) &= \gamma_{L,R}(x', x, t), & \gamma_{R,L}(x', x, t) &= \gamma_{L,R}(x, x', t). \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Таким образом, удвоенное значение амплитуды для двух фотонов, движущихся в разные стороны, связано с симметрией состояний RL и LR .

Плотность вероятностей соответствующих состояний может быть найдена путем проецирования волновой функции (3.4.1) на нормированные вектора фоковского базиса:

$$\begin{aligned}
\langle e, 0 | a(x) | \Psi(t) \rangle_2 &= \beta_R(x, t), & \langle e, 0 | b(x) | \Psi(t) \rangle_2 &= \beta_L(x, t), \\
\frac{1}{\sqrt{2}} \langle g, 0 | a(x_1) a(x_2) | \Psi(t) \rangle_2 &= \sqrt{2} \gamma_{R,R}(x_1, x_2, t), \\
\frac{1}{\sqrt{2}} \langle g, 0 | b(x_1) b(x_2) | \Psi(t) \rangle_2 &= \sqrt{2} \gamma_{L,L}(x_1, x_2, t), \\
\langle g, 0 | a(x_1) b(x_2) | \Psi(t) \rangle_2 &= 2 \gamma_{R,L}(x_1, x_2, t).
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Множитель $\sqrt{2}$ возникает в (3.4.3) от двух-фотонных состояний, которые дают $\langle 0 | a(x_1) x(x_2) a^\dagger(x_3) a^\dagger(x_4) | 0 \rangle = \delta(x_1 - x_3) \delta(x_2 - x_4) + \delta(x_1 - x_4) \delta(x_2 - x_3)$. То же верно и для операторов левых фотонов $b(x), b^\dagger(x)$.

Полные вероятности обнаружить одиночный фотон и возбужденный кубит, либо два фотона, есть:

$$P_{e,R}(t) = \int dx |\beta_R(x, t)|^2, \quad P_{e,L}(t) = \int dx |\beta_L(x, t)|^2, \tag{3.4.4a}$$

$$\begin{aligned}
P_{R,R}(t) &= 2 \iint dx_1 dx_2 |\gamma_{R,R}(x_1, x_2, t)|^2, & P_{L,L}(t) &= 2 \iint dx_1 dx_2 |\gamma_{L,L}(x_1, x_2, t)|^2, \\
P_{R,L}(t) &= 4 \iint dx_1 dx_2 |\gamma_{R,L}(x_1, x_2, t)|^2.
\end{aligned} \tag{3.4.4b}$$

Таким образом, условие нормировки для волновой функции (3.4.1) выглядит как:

$$P_{e,R}(t) + P_{e,L}(t) + P_{R,R}(t) + P_{L,L}(t) + P_{R,L}(t) = 1. \tag{3.4.5}$$

Из уравнения Шредингера для гамильтониана (3.2.6) и волновой функции (3.4.1) получим пять дифференциальных уравнений для амплитуд:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_g \frac{\partial}{\partial x} \right) \beta_R(x, t) = -2iV e^{i\Omega t} (\gamma_{R,R}(x, 0, t) + \gamma_{R,L}(x, 0, t)), \tag{3.4.6a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu_g \frac{\partial}{\partial x} \right) \beta_L(x, t) = -2iV e^{i\Omega t} (\gamma_{L,L}(x, 0, t) + \gamma_{R,L}(0, x, t)), \tag{3.4.6b}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_g \frac{\partial}{\partial x} + \nu_g \frac{\partial}{\partial x'} \right) \gamma_{R,R}(x, x', t) = -i \frac{V}{2} e^{-i\Omega t} (\delta(x) \beta_R(x', t) + \delta(x') \beta_R(x, t)), \tag{3.4.6c}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu_g \frac{\partial}{\partial x} - \nu_g \frac{\partial}{\partial x'} \right) \gamma_{L,L}(x, x', t) = -i \frac{V}{2} e^{-i\Omega t} (\delta(x) \beta_L(x', t) + \delta(x') \beta_L(x, t)), \tag{3.4.6d}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_g \frac{\partial}{\partial x} - \nu_g \frac{\partial}{\partial x'} \right) \gamma_{R,L}(x, x', t) = -i \frac{V}{2} e^{-i\Omega t} (\delta(x) \beta_L(x', t) + \delta(x') \beta_R(x, t)), \tag{3.4.6e}$$

Дальнейший расчет подобен случаю с одним возбуждением из предыдущего раздела. Чтобы найти формальное решение для фотонных амплитуд (3.4.6с-3.4.6е), нужно перейти через фурье-преобразование в k -пространство:

$$\gamma_{i,j}(x, x', t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \bar{\gamma}_{i,j}(k, k', t) e^{ikx} e^{ik'x'}, \quad i, j = R, L \quad (3.4.7a)$$

$$\beta_i(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \bar{\beta}_i(k, t) e^{ikx}. \quad (3.4.7b)$$

Подставляем (3.4.7) в (3.4.6с-3.4.6е) и, раскрывая дельта-функции через интегральное представление $\delta(x) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\gamma}_{R,R}(k_1, k_2, t) + i\nu_g(k_1 + k_2) \bar{\gamma}_{R,R}(k_1, k_2, t) = -i \frac{V}{2\sqrt{2\pi}} e^{-i\Omega t} (\bar{\beta}_R(k_1, t) + \bar{\beta}_R(k_2, t)), \quad (3.4.8a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\gamma}_{L,L}(k_1, k_2, t) - i\nu_g(k_1 + k_2) \bar{\gamma}_{L,L}(k_1, k_2, t) = -i \frac{V}{2\sqrt{2\pi}} e^{-i\Omega t} (\bar{\beta}_L(k_1, t) + \bar{\beta}_L(k_2, t)), \quad (3.4.8b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\gamma}_{R,L}(k_1, k_2, t) + i\nu_g(k_1 - k_2) \bar{\gamma}_{R,L}(k_1, k_2, t) = -i \frac{V}{2\sqrt{2\pi}} e^{-i\Omega t} (\bar{\beta}_R(k_1, t) + \bar{\beta}_L(k_2, t)). \quad (3.4.8c)$$

Формальное решение (3.4.8) есть:

$$\bar{\gamma}_{R,R}(k_1, k_2, t) = -i \frac{V}{2\sqrt{2\pi}} e^{-i\nu_g(k_1+k_2)t} \int_0^t dt' e^{-i\Omega t'} e^{i\nu_g(k_1+k_2)t'} (\bar{\beta}_R(k_1, t') + \bar{\beta}_R(k_2, t')), \quad (3.4.9a)$$

$$\bar{\gamma}_{L,L}(k_1, k_2, t) = -i \frac{V}{2\sqrt{2\pi}} e^{i\nu_g(k_1+k_2)t} \int_0^t dt' e^{-i\Omega t'} e^{-i\nu_g(k_1+k_2)t'} (\bar{\beta}_L(k_1, t') + \bar{\beta}_L(k_2, t')), \quad (3.4.9b)$$

$$\bar{\gamma}_{R,L}(k_1, k_2, t) = -i \frac{V}{2\sqrt{2\pi}} e^{-i\nu_g(k_1-k_2)t} \int_0^t dt' e^{-i\Omega t'} e^{i\nu_g(k_1-k_2)t'} (\bar{\beta}_R(k_1, t') + \bar{\beta}_L(k_2, t')). \quad (3.4.9c)$$

Тут сделано предположение, что в начальный момент времени кубит всегда возбужден, т.е. любые двухфотонные амплитуды для $t = 0$ равны нулю.

Далее, преобразовывая обратно в x -пространство и производя перестановку переменных, получаем окончательный набор для двух-фотонных амплитуд:

$$\begin{aligned} \gamma_{R,R}(x_1, x_2, t) = & -i \frac{V}{2\nu_g} e^{-i\Omega(t-x_1/\nu_g)} \beta_R \left(x_2 - x_1, t - \frac{x_1}{\nu_g} \right) \theta(x_1) \theta \left(t - \frac{x_1}{\nu_g} \right) \\ & -i \frac{V}{2\nu_g} e^{-i\Omega(t-x_2/\nu_g)} \beta_R \left(x_1 - x_2, t - \frac{x_2}{\nu_g} \right) \theta(x_2) \theta \left(t - \frac{x_2}{\nu_g} \right), \end{aligned} \quad (3.4.10a)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{L,L}(x_1, x_2, t) = & -i \frac{V}{2\nu_g} e^{-i\Omega(t+x_1/\nu_g)} \beta_L \left(x_2 - x_1, t + \frac{x_1}{\nu_g} \right) \theta(-x_1) \theta \left(t + \frac{x_1}{\nu_g} \right) \\ & -i \frac{V}{2\nu_g} e^{-i\Omega(t+x_2/\nu_g)} \beta_L \left(x_1 - x_2, t + \frac{x_2}{\nu_g} \right) \theta(-x_2) \theta \left(t + \frac{x_2}{\nu_g} \right), \end{aligned} \quad (3.4.10b)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{R,L}(x_1, x_2, t) = & -i \frac{V}{2\nu_g} e^{-i\Omega(t-x_1/\nu_g)} \beta_L \left(x_1 + x_2, t - \frac{x_1}{\nu_g} \right) \theta(x_1) \theta \left(t - \frac{x_1}{\nu_g} \right) \\ & -i \frac{V}{2\nu_g} e^{-i\Omega(t+x_2/\nu_g)} \beta_R \left(x_1 + x_2, t + \frac{x_2}{\nu_g} \right) \theta(-x_2) \theta \left(t + \frac{x_2}{\nu_g} \right). \end{aligned} \quad (3.4.10c)$$

Для нахождения кубитных амплитуд из (3.4.6a) и (3.4.6b) нужно взять фотонные члены (3.4.10) с одной из координат, равной нулю, и подставить их в уравнения. Проделав это, получим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_g \frac{\partial}{\partial x} \right) \beta_R(x, t) = -\Gamma \beta_R(x, t) - \Gamma F(x, t), \quad (3.4.11a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu_g \frac{\partial}{\partial x} \right) \beta_L(x, t) = -\Gamma \beta_L(x, t) - \Gamma F(-x, t), \quad (3.4.11b)$$

где, помимо скорости затухания $\Gamma = V^2 / \nu_g$, дополнительно введено следующее обозначение:

$$F(x, t) = e^{i\Omega \frac{x}{\nu_g}} \theta(x) \theta \left(t - \frac{x}{\nu_g} \right) \left[\beta_R \left(-x, t - \frac{x}{\nu_g} \right) + \beta_L \left(x, t - \frac{x}{\nu_g} \right) \right]. \quad (3.4.12)$$

Снова используя фурье-преобразование (3.4.7b), перейдем в k-пространство:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\beta}_R(k, t) + (ik\nu_g + \Gamma) \bar{\beta}_R(k, t) = -\Gamma \bar{F}_+(k, t), \quad (3.4.13a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\beta}_L(k, t) + (-ik\nu_g + \Gamma) \bar{\beta}_L(k, t) = -\Gamma \bar{F}_-(k, t), \quad (3.4.13b)$$

где также введены фурье-образы для F(x,t) для положительной и отрицательной координат:

$$\bar{F}_\pm(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(\pm x, t) e^{-ikx}. \quad (3.4.14)$$

Формальное решение (3.4.13) есть:

$$\bar{\beta}_R(k, t) = \bar{\beta}_R(k, 0) e^{-(iv_g k + \Gamma)t} - \Gamma \int_0^t d\tau e^{-(iv_g k + \Gamma)(t-\tau)} \bar{F}_+(k, \tau), \quad (3.4.15a)$$

$$\bar{\beta}_L(k, t) = -\Gamma \int_0^t d\tau e^{(iv_g k - \Gamma)(t-\tau)} \bar{F}_-(k, \tau), \quad (3.4.15b)$$

Здесь предполагается, что начальное значение для возбужденного кубита и фотона, движущегося влево, равно нулю. Переводя (3.4.15) обратно в x-пространство и раскрывая F(x,t) через (3.4.12), получим:

$$\beta_R(x, t) = e^{-\Gamma t} \beta_0(x - v_g t) - \Gamma \theta(x) \theta\left(t - \frac{x}{v_g}\right) \int_0^{x/v_g} dt' e^{-\Gamma t'} e^{-i\Omega\left(t' - \frac{x}{v_g}\right)} \left[\beta_R\left(-x + v_g t', t - \frac{x}{v_g}\right) + \beta_L\left(x - v_g t', t - \frac{x}{v_g}\right) \right], \quad (3.4.16a)$$

$$\beta_L(x, t) = -\Gamma \theta(-x) \theta\left(t + \frac{x}{v_g}\right) \int_0^{-x/v_g} dt' e^{-\Gamma t'} e^{-i\Omega\left(t' + \frac{x}{v_g}\right)} \times \left[\beta_L\left(-x - v_g t', t + \frac{x}{v_g}\right) + \beta_R\left(x + v_g t', t + \frac{x}{v_g}\right) \right], \quad (3.4.16b)$$

Здесь верхние пределы интегралов переставлены в соответствии с тета-функциями.

Чтобы найти точные выражения для β_R и β_L , необходимо сделать сдвигку в выражениях (3.4.16), и подставить эти смещенные значения обратно в эти же выражения. Из-за тета-функций мы сможем оборвать рекурсивную часть слагаемых, и в итоге получить искомые выражения (подробный вывод см. в приложении Б):

$$\beta_R(x, t) = e^{-\Gamma t} \beta_0(x - v_g t) + -\Gamma \theta(x) \theta\left(t - \frac{x}{v_g}\right) \int_0^{x/v_g} dt' e^{-\Gamma t'} e^{-i\Omega\left(t' - \frac{x}{v_g}\right)} e^{-\Gamma(t - x/v_g)} \beta_0(v_g(t' - t)), \quad (3.4.17a)$$

$$\beta_L(x, t) = -\Gamma \theta(-x) \theta\left(t + \frac{x}{v_g}\right) \int_0^{-x/v_g} dt' e^{-\Gamma t'} e^{-i\Omega\left(t' + \frac{x}{v_g}\right)} e^{-\Gamma(t + x/v_g)} \beta_0(v_g(t' - t)), \quad (3.4.17b)$$

Таким образом, выражения (3.4.17) представляют собой общий вид решения для амплитуд с одним фотоном и возбужденным кубитом. Для нахождения двух-фотонных амплитуд необходимо подставить известные выражения (3.4.17) в формальные решения (3.4.10). Дальнейший расчет мы будем делать уже для конкретных начальных условий.

3.4.2. Падающая на возбужденный кубит монохроматическая волна

Возьмем в качестве начального состояния падающую на возбужденный кубит монохроматическую волну:

$$\beta_0(x - v_g t) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_0(x - v_g t)}. \quad (3.4.18)$$

Здесь частота падающего фотона $\omega_0 = k_0 v_g$. Подставляя данный вид начального поля, для уравнений (3.4.17) получаем:

$$\beta_R(x, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-(i\omega_0 + \Gamma)t} e^{ik_0 x} - \frac{\Gamma}{\sqrt{L}} e^{-(i\omega_0 + \Gamma)t} \frac{\left(e^{ik_0 x} - e^{(i\Omega + \Gamma)x/v_g} \right)}{i\omega_0 - i\Omega - \Gamma} \theta(x) \theta\left(t - \frac{x}{v_g}\right), \quad (3.4.19a)$$

$$\beta_L(x, t) = -\frac{\Gamma}{\sqrt{L}} e^{-(i\omega_0 + \Gamma)t} \frac{e^{-ik_0 x} - e^{-(i\Omega + \Gamma)x/v_g}}{i\omega_0 - i\Omega - \Gamma} \theta(x) \theta\left(t + \frac{x}{v_g}\right). \quad (3.4.19b)$$

Взяв квадрат модуля и проинтегрировав эти выражения по координате, получим вероятности обнаружить одновременно возбужденный кубит и правый, либо левый, фотон:

$$P_{e,R}(t) = e^{-2\Gamma t} + \frac{v_g}{L} \frac{\Gamma^2 e^{-2\Gamma t}}{\delta_0^2 + \Gamma^2} \left[3t + \frac{e^{2\Gamma t} - 1}{2\Gamma} \right] + \frac{v_g}{L} \frac{2\Gamma e^{-2\Gamma t}}{(\delta_0^2 + \Gamma^2)^2} \left[2\Gamma^2 - \delta_0^2 + e^{\Gamma t} (\delta_0^2 - 2\Gamma^2) \cos \delta_0 t - e^{\Gamma t} 3\delta_0 \Gamma \sin \delta_0 t \right], \quad (3.4.20a)$$

$$P_{e,L}(t) = \frac{v_g}{L} \frac{\Gamma^2}{\delta_0^2 + \Gamma^2} \left[t e^{-2\Gamma t} - \frac{1}{2\Gamma} (e^{-2\Gamma t} - 1) + 2 \frac{\Gamma e^{-2\Gamma t} - \Gamma e^{-\Gamma t} \cos \delta_0 t - \delta_0 e^{-\Gamma t} \sin \delta_0 t}{\delta_0^2 + \Gamma^2} \right], \quad (3.4.20b)$$

где снова введено понятие расстройки поля от кубита: $\delta_0 = (\omega_0 - \Omega)$.

Сравнение вероятностей обнаружения одиночного фотона с кубитом в основном состоянии $P_{g,R}$ и $P_{g,L}$ (одно возбуждение) с вероятностями обнаружения одиночного фотона и возбужденного кубита $P_{e,R}$ и $P_{e,L}$ (два возбуждения) представлено на рисунке 3.6. Эти вероятности сильно зависят от параметра $\Gamma\tau$, который описывает “скорость” взаимодействия или длину волновода L .

В случае малых $\Gamma\tau = 0,1$ (рис. 3.6a) вероятность отражения фотона от кубита практически равна нулю для обоих случаев возбуждения, таким образом, падающая волна полностью пропускается. Но, поскольку $P_{e,R}(t)$ соответствует также кубиту в возбужденном состоянии, эта вероятность спонтанно затухает со временем, но довольно медленно (сравните красную и оранжевую линии на рис. 3.6a).

Для $\Gamma\tau = 1$ (рис. 3.6b) вероятность отражения начинает расти, но все еще имеет малое значение, и почти одинакова для $P_{e,L}(t)$ и для $P_{g,L}(t)$ (синяя и голубая линии). Вероятность обнаружить движущийся вправо фотон и возбужденный кубит теперь четко описывается экспоненциальным распадом из-за спонтанного излучения (красная сплошная линия на рис. 3.6b), тогда как для летящего направо фотона и кубита в основном состоянии спад имеет более замедленный характер (оранжевая пунктирная линия).

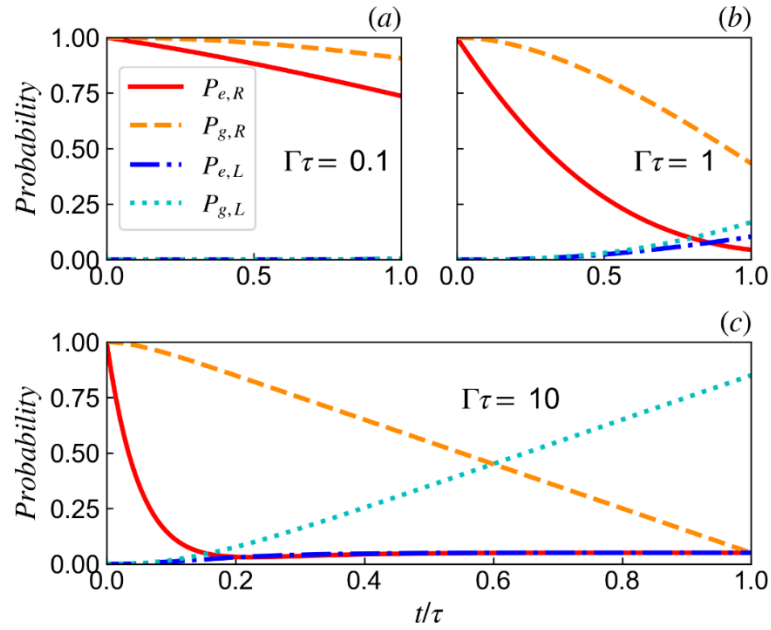


Рис. 3.6. Сравнение вероятностей обнаружения одиночного фотона для падающей монохроматической волны: вероятность обнаружения движущегося вправо фотона и возбужденного кубита дана в (3.4.20a), т. е. случай двух возбуждений (красная сплошная линия); движущегося вправо фотона и кубита в основном состоянии дана в (3.3.21a), т. е. случай одиночного возбуждения (оранжевая пунктирная линия); движущегося влево фотона и возбужденного кубита (3.4.20b) (синяя штрихпунктирная линия); движущегося влево фотона и кубита в основном состоянии (3.3.21b) (голубая пунктирная линия). Различные графики построены для различных значений скорости взаимодействия: (a) $\Gamma\tau = 0,1$; (b) $\Gamma\tau = 1$; (c) $\Gamma\tau = 10$. Остальные параметры: $\Gamma / \Omega = 0,02$; $\omega_0 / \Omega = 1$

Это поведение становится еще более выраженным для $\Gamma\tau = 10$ (рис. 3.6c). Как можно видеть, вероятность $P_{e,R}(t)$ экспоненциально убывает довольно быстро (красная сплошная линия), в то время как $P_{g,R}(t)$ линейно уменьшается в течение всего времени, которое требуется падающей волне для распространения по волноводу (оранжевая пунктирная линия). Кроме того, когда одиночный фотон взаимодействует с кубитом в основном состоянии, при больших $\Gamma\tau = 10$ кубит начинает напоминать идеальное зеркало и полностью отражать резонансное поле (голубая пунктирная линия на рис. 3.6c).

С точки зрения определения состояния кубита в открытом волноводе, при проведении измерений нам важно, чтобы фотон долетал до детекторов поля быстрее, чем кубит распадется в основное состояние. Другими словами, время прохождения фотоном всего волновода τ должно быть намного меньше, чем время жизни кубита $\tau_{\text{qub}} = 1/\Gamma$. Соответственно, определение кубитного состояния имеет смысл проводить только в режиме $\Gamma\tau \ll 1$. Как видно из рис. 3.6a,

для падающей монохроматической волны значительных отличий двумя видами рассеяния нет – небольшое отличие имеет место только в проходящей волне для максимального времени $t = \tau$. Следовательно, для монохроматической волны определение состояния кубита по рассеянному излучению может быть затруднительно.

3.4.3. Гауссов пакет, падающий на возбужденный кубит

Теперь рассмотрим начальное поле в виде гауссова пакета, который в пространстве задается формулой (3.3.25). Фотонные амплитуды для рассеяния на возбужденном кубите в таком случае будут:

$$\beta_R(x, t) = \left(\frac{2}{\pi \Delta_x^2} \right)^{1/4} e^{-\Gamma t} e^{-i\omega_S \left(t - \frac{x}{v_g} \right)} e^{-\frac{(x+x_0-v_g t)^2}{\Delta_x^2}} -$$

$$-\Gamma \left(\frac{2}{\pi \Delta_x^2} \right)^{1/4} \theta(x) \theta \left(t - \frac{x}{v_g} \right) e^{-\Gamma(t-x/v_g)} e^{-i\omega_S t} e^{i\Omega x/v_g} \int_0^{x/v_g} d\tau e^{(i\omega_S - i\Omega - \Gamma)\tau} e^{-\frac{(x_0+v_g \tau - v_g t)^2}{\Delta_x^2}},$$
(3.4.22a)

$$\beta_L(x, t) = -\Gamma \left(\frac{2}{\pi \Delta_x^2} \right)^{1/4} \theta(-x) \theta \left(t + \frac{x}{v_g} \right) e^{-\Gamma(t+x/v_g)} e^{-i\omega_S t} e^{-i\Omega x/v_g} \times$$

$$\int_0^{-x/v_g} d\tau e^{(i\omega_S - i\Omega - \Gamma)\tau} e^{-\frac{(x_0+v_g \tau - v_g t)^2}{\Delta_x^2}},$$
(3.4.22b)

Из точных амплитудных выражений (3.4.22) можно найти вероятности обнаружения возбужденного кубита и одного фотона, движущегося в правом или левом направлении. Сравнение вероятностей обнаружения одного фотона (правого или левого) с кубитом в основном или возбужденном состоянии представлено на рисунке 3.7.

Как и в случае с монохроматической волной, для определения состояния кубита по измерению рассеянного излучения нам важно, чтобы время прихода фотона на детектор было намного меньше, чем скорость распада кубита. Фактически это выполняется для режима $\Gamma t \ll 1$, и на временном масштабе $t\Gamma \sim 1$. Как видно из рис. 3.7а, в случае падающего гауссова пакета, существует значительная разница в вероятности обнаружения прошедшего сигнала для кубита в возбужденном, либо в основном состоянии, и небольшая разница в вероятностях отражения. Данную закономерность можно использовать как основу для методики определения кубитного состояния в открытом волноводе.

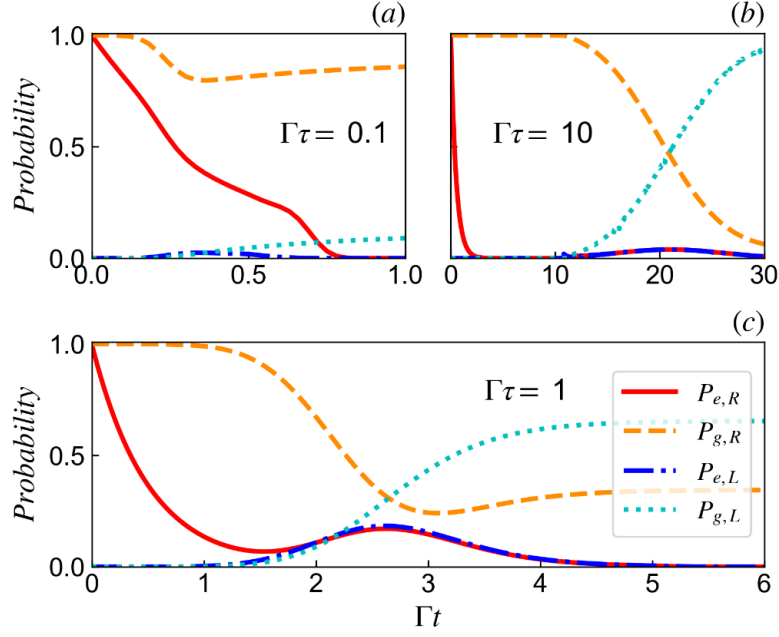


Рис. 3.7. Сравнение вероятностей обнаружения одиночного фотона для падающего гауссова импульса в различных конфигурациях направления фотона и кубита: кубит возбужден и фотон движется вправо (два возбуждения), $P_{e,R} = \int |\beta_R(x,t)|^2 dx$, найдена с помощью (3.4.22a) (красная сплошная линия); кубит в основном состоянии и фотон движется вправо (одно возбуждение) $P_{g,R} = \int |f(x,t)|^2 dx$, найдена с помощью (3.3.25a) (оранжевая пунктирная линия); кубит возбужден и фотон движется влево (два возбуждения) $P_{e,L} = \int |\beta_L(x,t)|^2 dx$, найдена с помощью (3.4.22b) (синяя штрихпунктирная линия); кубит в основном состоянии и фотон движется влево (одно возбуждение) $P_{g,L} = \int |g(x,t)|^2 dx$, найдена с помощью (3.3.25b) (голубая пунктирная линия). Различные графики построены для различной скорости взаимодействия: (a) $\Gamma\tau = 0,1$; (b) $\Gamma\tau = 10$; (c) $\Gamma\tau = 1$. Остальные параметры: $\Gamma/\Omega = 0,02$; $\omega_0/\Omega = 1$; $x_0/\Delta_x = 2$.

Взяв квадрат модуля амплитуд (3.4.22), мы можем проанализировать пространственное распределение состояний с возбужденным кубитом и одним движущимся вперед (или назад) фотоном, которое представлено на рисунке 3.8. Здесь рассмотрено два различных случая – когда падающий гауссов импульс изначально расположен относительно далеко от кубита $x_0 = 5 \Delta_x$ (рис. 3.8a) и когда он рождается гораздо ближе $x_0 = 0,5 \Delta_x$ (рис. 3.8b).

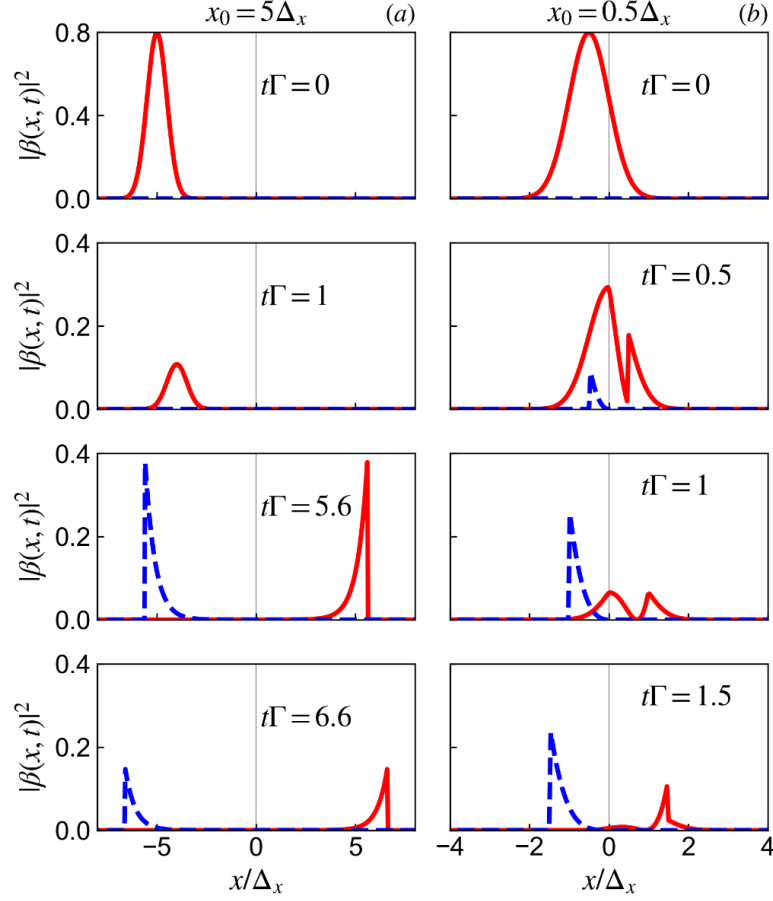


Рис. 3.8. Пространственное распределение фотонных полей, распространяющихся вперед $p_{e,R}(x, t) = \Delta_x |\beta_R(x, t)|^2$ (красная сплошная линия) и назад $p_{e,L}(x, t) = \Delta_x |\beta_L(x, t)|^2$ (синяя пунктирная линия), найденное с помощью (3.4.22) для двух расстояний от начального положения импульса до местоположения кубита (а) $x_0 = 5\Delta_x$ и (б) $x_0 = 0,5\Delta_x$. Моменты времени $t\Gamma$, в которые построены распределения, отмечены на соответствующих графиках. Остальные параметры: $\Gamma / \Omega = 0,02$; $\omega_0 / \Omega = 1$, $\Gamma \tau = 1$.

Для первого случая в начальный момент времени (верхний график на рис. 3.8а) представлен только падающий гауссов пакет в точке $x_0 = 5\Delta_x$. Поскольку распределение плотности $p(x, t)$ теперь соответствует состоянию с возбужденным кубитом, оно будет спонтанно распадаться со скоростью 2Γ по мере увеличения времени, соответственно переходя в двухфотонные состояния (второй график на рис. 3.8а). Однако, когда гауссов импульс достигает местоположения кубита ($x = 0$), он может повторно возбудить кубит, что отображает спонтанно испущенные фотоны, движущиеся в обоих направлениях с равными вероятностями (третий график на рис. 3.8а). И снова, через некоторое время кубит начнет распадаться, так что пространственное распределение будет стремиться к нулю (нижний график на рис. 3.8а). Максимальное значение плотности вероятности для повторного возбуждения кубита достигается в момент времени $t\Gamma = 5,6$, что

примерно совпадает со временем, необходимым чтобы центр импульса дошел до местоположения кубита $t_0\Gamma = \tau \Gamma x_0 / \Delta_x = 5$.

Таким образом, когда гауссов импульс рождается относительно далеко от местоположения кубита, как рассматривалось выше, весь процесс рассеяния можно представить в виде двух отдельных событий: спонтанного распада возбужденного кубита и рассеяния падающего фотона на кубите в основном состоянии. Это подтверждается равными распределениями вероятностей для кубита испустить фотон в обоих направлениях, как показано на нижних графиках на рис. 3.8а. Таким образом, для получения стимулированного излучения начальное положение гауссова импульса должно быть намного ближе к кубиту, например $x_0 = 0,5 \Delta_x$, как на рис. 3.8b. В этом случае мы видим, что пространственное распределение прошедшей волны довольно сильно отличается от предыдущего случая далеко расположенного импульса. Взаимодействие гауссова пакета с возбужденным кубитом изменяет пространственную форму прошедшей волны, так что она имеет теперь два пика (средние графики на рис. 3.8b). Только через некоторое время прошедшая волна почти полностью трансформируется в обычную затухающую экспоненциальную форму, но все еще, по сравнению с отраженной волной, имеет меньшее значение (нижний график на рис. 3.8b). Другими словами, при меньшем расстоянии падающего импульса от кубита прошедшая и отраженная волны становятся более асимметричными.

3.4.4. Двух-фотонные амплитуды для падающего гауссова импульса

Наибольший интерес с точки зрения эффекта вынужденного излучения представляют двух-фотонные амплитуды вероятности, общее выражение для которых дано в (3.4.10). Зная кубит-фотонные амплитуды $\beta(x,t)$ из предыдущего пункта, мы можем найти точные выражения для двух-фотонных амплитуд вероятности для падающего гауссова пакета:

$$\begin{aligned}
\gamma_{R,R}(x_1, x_2, t) = & -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{\nu_g}} \left(\frac{2}{\pi \Delta_x^2} \right)^{1/4} e^{-(i\Omega+\Gamma)(t-x_1/\nu_g)} e^{-i\omega_S \left(t - \frac{x_2}{\nu_g} \right)} e^{-\frac{(x_2+x_0-\nu_g t)^2}{\Delta_x^2}} \theta(x_1) \theta \left(t - \frac{x_1}{\nu_g} \right) \\
& -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{\nu_g}} \left(\frac{2}{\pi \Delta_x^2} \right)^{1/4} e^{-(i\Omega+\Gamma)(t-x_2/\nu_g)} e^{-i\omega_S \left(t - \frac{x_1}{\nu_g} \right)} e^{-\frac{(x_1+x_0-\nu_g t)^2}{\Delta_x^2}} \theta(x_2) \theta \left(t - \frac{x_2}{\nu_g} \right) \\
& +i \frac{\Gamma}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{\nu_g}} \left(\frac{2}{\pi \Delta_x^2} \right)^{1/4} \theta(x_1) \theta(x_2 - x_1) \theta \left(t - \frac{x_1}{\nu_g} \right) \theta \left(t - \frac{x_2}{\nu_g} \right) \times \\
& e^{-i(\omega_S+\Omega) \left(t - \frac{x_1}{\nu_g} \right)} e^{-\Gamma \left(t - \frac{x_2}{\nu_g} \right)} e^{i \frac{\Omega}{\nu_g} (x_2 - x_1)} \times \int_0^{(x_2-x_1)/\nu_g} d\tau e^{(i\omega_S - i\Omega - \Gamma)\tau} e^{-\frac{(x_0+x_1+\nu_g \tau - \nu_g t)^2}{\Delta_x^2}} \\
& +i \frac{\Gamma}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{\nu_g}} \left(\frac{2}{\pi \Delta_x^2} \right)^{1/4} \theta(x_1) \theta(x_1 - x_2) \theta \left(t - \frac{x_1}{\nu_g} \right) \theta \left(t - \frac{x_2}{\nu_g} \right) \times \\
& e^{-i(\omega_S+\Omega) \left(t - \frac{x_2}{\nu_g} \right)} e^{-\Gamma \left(t - \frac{x_1}{\nu_g} \right)} e^{i \frac{\Omega}{\nu_g} (x_1 - x_2)} \times \int_0^{(x_1-x_2)/\nu_g} d\tau e^{(i\omega_S - i\Omega - \Gamma)\tau} e^{-\frac{(x_0+x_2+\nu_g \tau - \nu_g t)^2}{\Delta_x^2}}, \tag{3.4.23a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{L,L}(x_1, x_2, t) = & i \frac{\Gamma}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{\nu_g}} \left(\frac{2}{\pi \Delta_x^2} \right)^{1/4} \theta(-x_1) \theta(x_1 - x_2) \theta \left(t + \frac{x_1}{\nu_g} \right) \theta \left(t + \frac{x_2}{\nu_g} \right) \times \\
& e^{-\Gamma \left(t + \frac{x_2}{\nu_g} \right)} e^{-i(\omega_S+\Omega) \left(t + \frac{x_1}{\nu_g} \right)} e^{-i \frac{\Omega}{\nu_g} (x_2 - x_1)} \times \int_0^{(x_1-x_2)/\nu_g} d\tau e^{(i\omega_S - i\Omega - \Gamma)\tau} e^{-\frac{(x_0-x_1+\nu_g \tau - \nu_g t)^2}{\Delta_x^2}} \\
& +i \frac{\Gamma}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{\nu_g}} \left(\frac{2}{\pi \Delta_x^2} \right)^{1/4} \theta(-x_2) \theta(x_2 - x_1) \theta \left(t + \frac{x_1}{\nu_g} \right) \theta \left(t + \frac{x_2}{\nu_g} \right) \times \\
& e^{-\Gamma \left(t + \frac{x_1}{\nu_g} \right)} e^{-i(\omega_S+\Omega) \left(t + \frac{x_2}{\nu_g} \right)} e^{-i \frac{\Omega}{\nu_g} (x_1 - x_2)} \times \int_0^{(x_2-x_1)/\nu_g} d\tau e^{(i\omega_S - i\Omega - \Gamma)\tau} e^{-\frac{(x_0-x_2+\nu_g \tau - \nu_g t)^2}{\Delta_x^2}}, \tag{3.4.23b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{R,L}(x_1, x_2, t) = & i \frac{\Gamma}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{\nu_g}} \left(\frac{2}{\pi \Delta_x^2} \right)^{1/4} \theta(x_1) \theta(-x_1 - x_2) \theta\left(t - \frac{x_1}{\nu_g}\right) \theta\left(t + \frac{x_2}{\nu_g}\right) \times \\
& e^{-i(\omega_S + \Omega)\left(t - \frac{x_1}{\nu_g}\right)} e^{-\Gamma\left(t + \frac{x_2}{\nu_g}\right)} e^{-i\frac{\Omega}{\nu_g}(x_1 + x_2)} \times \int_0^{-(x_1 + x_2)/\nu_g} d\tau e^{(i\omega_S - i\Omega - \Gamma)\tau} e^{-\frac{(x_0 + x_1 + \nu_g\tau - \nu_g t)^2}{\Delta_x^2}} \\
& - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{\nu_g}} \left(\frac{2}{\pi \Delta_x^2} \right)^{1/4} e^{-(i\Omega + \Gamma)(t + x_2/\nu_g)} e^{-i\omega_S\left(t - \frac{x_1}{\nu_g}\right)} e^{-\frac{(x_1 + x_0 - \nu_g t)^2}{\Delta_x^2}} \theta(-x_2) \theta\left(t + \frac{x_2}{\nu_g}\right) \\
& + i \frac{\Gamma}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{\nu_g}} \left(\frac{2}{\pi \Delta_x^2} \right)^{1/4} \theta(-x_2) \theta(x_1 + x_2) \theta\left(t - \frac{x_1}{\nu_g}\right) \theta\left(t + \frac{x_2}{\nu_g}\right) \times \\
& e^{-i(\omega_S + \Omega)\left(t + \frac{x_2}{\nu_g}\right)} e^{-\Gamma\left(t - \frac{x_1}{\nu_g}\right)} e^{i\frac{\Omega}{\nu_g}(x_1 + x_2)} \times \int_0^{(x_1 + x_2)/\nu_g} d\tau e^{(i\omega_S - i\Omega - \Gamma)\tau} e^{-\frac{(x_0 - x_2 + \nu_g\tau - \nu_g t)^2}{\Delta_x^2}}.
\end{aligned} \tag{3.4.23c}$$

Далее в этом разделе представлен графический анализ для двух-фотонных состояний на основе выражений (3.4.23). Как отмечалось выше, из них мы можем получить пространственное распределение вероятности двух-фотонных состояний (3.4.3), или полную вероятность обнаружения двух фотонов (3.4.4). Плотность вероятности, взятая в конкретный момент времени, есть двумерное распределение для двух различных состояний фотонов в пространстве, где координата x_1 соответствует первому фотону, а x_2 – второму. Взяв интеграл от этих плотностей по всему пространству волновода, мы найдем полную вероятность обнаружить два фотона во всем волноводе, как указано в (3.4.4).

Плотность вероятностей двухфотонных полей представлена на рисунке 3.9. Мы рассматриваем три возможные двухфотонные амплитуды: оба фотона распространяются вправо, $|\gamma_{R,R}(x_1, x_2, t)|^2$ (рис. 3.9 (а) и (d)), оба фотона распространяются влево, $|\gamma_{L,L}(x_1, x_2, t)|^2$ (рис. 3.9 (b) и (e)), и амплитуда, когда два фотона распространяются в противоположных направлениях, $|\gamma_{R,L}(x_1, x_2, t)|^2$ (рис. 3.9 (с) и (f)). Плотность вероятности для этих фотонных амплитуд показана для двух моментов времени: $t\Gamma = 1$, когда падающий гауссов пакет еще не достиг кубита (верхний ряд на рис. 3.9) и $t\Gamma = 3$, когда он уже провзаимодействовал с ним (нижний ряд на рис. 3.9). Точка пересечения белых вертикальных линий на этих рисунках отмечает положение кубита в $x_1, x_2 = 0$.

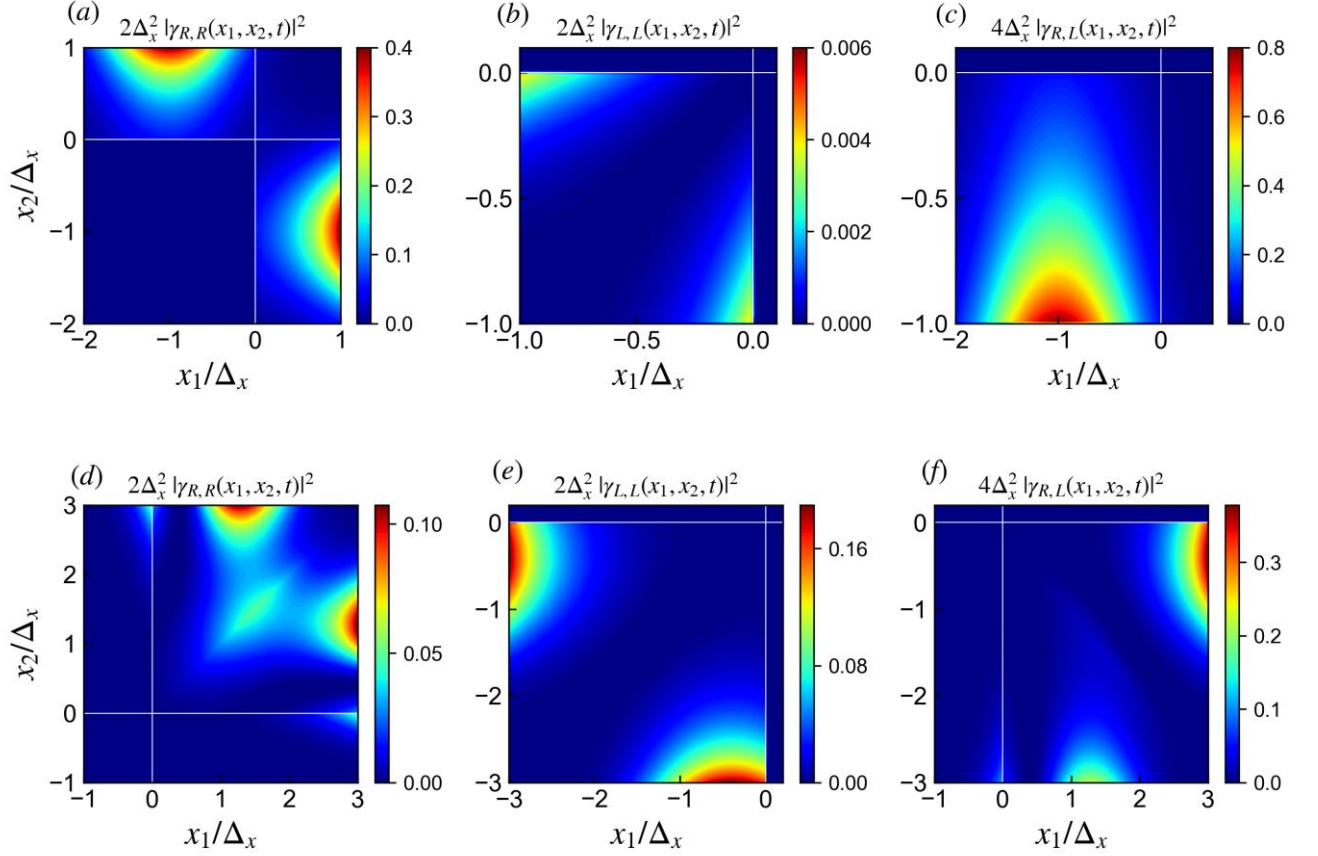


Рис. 3.9. Пространственное распределение двухфотонных полей для гауссова импульса, падающего на возбужденный кубит из точки $x_0/\Delta_x = 2$, посчитанное с помощью формул (3.4.23). Верхний ряд: начальный импульс, только начинающий падать на кубит, $t\Gamma = 1$. Нижний ряд: начальный импульс, уже рассеянный через кубит, $t\Gamma = 3$. Белые линии указывают местоположение кубита $x = 0$. Остальные параметры: $\Gamma/\Omega = 0,02$; $\omega_0/\Omega = 1$; $\Gamma\tau = 1$.

Сначала рассмотрим момент, когда падающий гауссов импульс еще не достиг кубита, $t < x_0/v_g$ (верхний ряд графиков на рис. 3.9а-с). В этом случае видно, что амплитуда, содержащая два движущихся влево фотона $\gamma_{L,L}$, практически равна нулю (рис. 3.9b), как и ожидалось. Между тем, для двух движущихся вправо фотонов $\gamma_{R,R}$ на рис. 3.9а есть два симметричных максимума, каждый из которых описывает два возможных сценария в двумерном координатном пространстве. Либо исходный гауссов пакет движется вправо в области $x_1 < 0$, в то время как распадающийся кубит испускает спонтанный фотон в правом направлении в область $x_2 > 0$. Этот сценарий соответствует максимуму в верхнем левом квадранте рис. 3.9а. Второй сценарий, это то что исходный гауссов пакет движется направо в области $x_2 < 0$, в то время как распадающийся кубит испускает спонтанный фотон в правую сторону в область $x_1 > 0$. Этот сценарий соответствует максимуму в нижнем правом квадранте рис. 3.9а. Поскольку эти два сценария физически неразличимы, каждый максимум на рис. 3.9а описывает один и тот же процесс:

движущийся вправо гауссов фотон, который еще не достиг кубита, и фотон, испускаемый вправо при кубитном распаде. Неразличимость этих двух сценариев является проявлением неразличимости двух фотонов, движущихся в одном направлении.

В случае противоположно движущихся фотонов $\gamma_{R,L}$ на рис. 3.9с существует только один сценарий: движущийся вправо гауссов фотон и фотон, испускаемый влево распадающимся кубитом, соответствуют одному и тому же квадранту в двумерной плоскости $x_1 < 0$, $x_2 < 0$. Этот процесс соответствует только одному максимуму, поскольку в этом случае мы точно знаем, что движущийся вправо фотон – это начальный гауссов пакет в точке x_1 , а движущийся влево фотон соответствует спонтанно испускаемому фотону в точке x_2 , и никакой двусмысленности здесь нет.

Нижний ряд графиков на рис. 3.9d-f описывает распределение фотонных полей в волноводе, когда гауссов пакет уже провзаимодействовал с кубитом, $t > x_0/v_g$. В этом случае появление двух движущихся влево фотонов $\gamma_{L,L}$ уже не равно нулю (рис. 3.9е), что соответствует как отражению гауссова импульса от кубита, так и испусканию спонтанного фотона влево. Как и прежде, наблюдаются два симметричных максимума из-за неразличимости фотонов, движущихся в одном направлении.

Для распределения $\gamma_{R,L}$ у нас также есть два различных сценария. Первый сценарий включает отраженный гауссов фотон в области $x_2 < 0$ и спонтанно испущенный фотон, движущийся вправо, в области $x_1 > 0$. Второй сценарий включает прошедший гауссов фотон в области $x_1 > 0$ и спонтанно испущенный фотон, движущийся влево, в области $x_2 < 0$. Эти сценарии соответствуют двум максимумам на рис. 3.9f, но в отличие от сценариев для $\gamma_{R,R}$ или $\gamma_{L,L}$, они не симметричны и не равны по амплитуде. Это связано с тем, что вероятности прохождения и отражения гауссова фотона при взаимодействии с кубитом не одинаковы и существенно зависят от времени взаимодействия. Кроме того, согласно принципу вынужденного излучения (поскольку падающий фотон движется вправо), вероятность испускания кубитом спонтанного фотона вправо должна быть намного выше вероятности испускания спонтанного фотона влево. Поэтому можно предположить, что нижний максимум в точке $x_1 \approx 1,3$; $x_2 = -3$ соответствует случаю, когда распавшийся кубит испустил фотон, движущийся влево, а второй максимум в точке $x_1 \approx 3$, $x_2 = -0,5$ соответствует случаю, когда распавшийся кубит испустил фотон, движущийся вправо, а входящий гауссов импульс отразился назад. Судя по числовым значениям, второй случай в два раза вероятнее первого.

Самый интересный результат получается для двух движущихся вправо фотонов $\gamma_{R,R}$ (рис. 3.9d). Два основных пика, видимые до момента, как импульс достиг кубита на рис. 3.9а, теперь расположены в положительной половине плоскости, т. е. справа от кубита. Это соответствует случаю, когда часть падающего гауссова пакета прошла через кубит, а распавшийся кубит

испустил фотон вправо. Однако, как можно видеть, в дополнение к этим двум симметричным максимумам появляется третий пик в точке $x_1 = x_2 \approx 1,5$ со значением примерно в два раза меньше двух основных пиков. Этот интересный эффект можно интерпретировать как пространственную группировку фотонов, поскольку оба фотона локализируются в пространстве, то есть высока вероятность обнаружить обе частицы очень близко друг к другу. Данный эффект более подробно будет рассмотрен ниже.

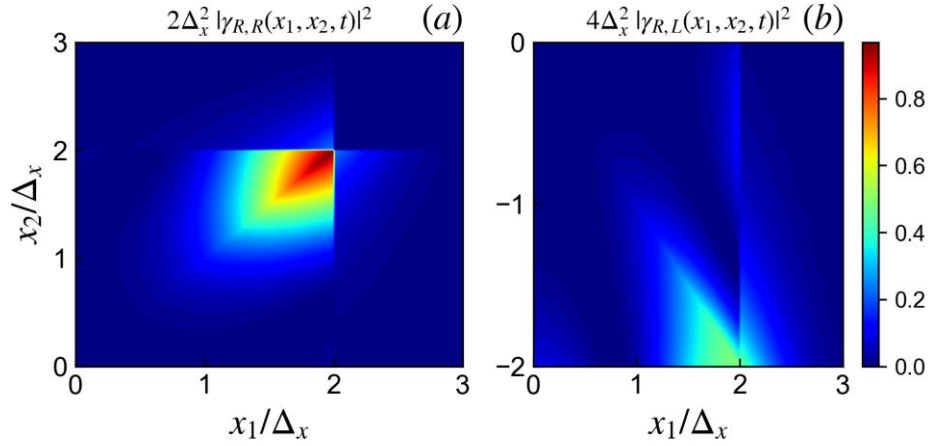


Рис. 3.10. Пространственное распределение двухфотонных полей с (a) двумя движущимися вправо фотонами $2\Delta_x^2 |\gamma_{R,R}(x_1, x_2, t)|^2$ и с (b) одним движущимся вправо фотоном и одним движущимся влево $4\Delta_x^2 |\gamma_{R,L}(x_1, x_2, t)|^2$ для гауссова импульса, близко расположенного к кубиту, $x_0 = 0,5\Delta_x$. Время $t\Gamma = 2$, так что взаимодействие падающего фотона и кубита уже произошло. Распределение для обоих движущихся влево фотонов не показано из-за относительно малых значений $2\Delta_x^2 |\gamma_{L,L}(x_1, x_2, t)|^2 \approx 0,12$. Остальные параметры: $\Gamma / \Omega = 0,02$; $\omega_0 / \Omega = 1$, $\Gamma \tau = 1$.

Все графики на рис. 3.9 построены для довольно короткого расстояния между начальным положением гауссова импульса и кубитом $x_0/\Delta_x = 2$. Однако, если требуется более тщательно исследовать стимулированное излучение, это расстояние следует взять еще меньше. На рис. 3.10 рассмотрен случай $x_0 = 0,5\Delta_x$ как на рис. 3.8b, поэтому гауссов пакет рождается очень близко к кубиту. Поскольку нас больше интересует двухфотонное распределение после взаимодействия с кубитом, момент во времени выбран $t\Gamma = 2$. Как видно из распределения обоих фотонов, движущихся вправо $\gamma_{R,R}(x_1, x_2, t)$ на рис. 3.10a, теперь есть только один основной пик для локализованных в пространстве фотонов $x_1 = x_2$ с отчетливой экспоненциальной формой. Это означает, что эффект группировки, видимый на рис. 3.9d, теперь доминирует в поведении фотонов. Также, сравнивая два фотона движущихся вправо с фотонами, движущимися в

противоположных направлениях $\gamma_{R,L}(x_1, x_2, t)$ (рис. 3.10b), видно, что значения последних почти в два раза меньше. Таким образом, подтверждается вывод, что для гауссова импульса, расположенного близко к кубиту, стимулированное излучение еще более выражено.

Более подробный анализ появления пространственной группировки фотонов показан на рисунке 3.11. На нем изображены плотности вероятности для двух правых фотонов, но для трех начальных положений гауссова пакета – $x_0 = \Delta_x$, $x_0 = 0,5\Delta_x$ и $x_0 = 0,2\Delta_x$. Каждый график взят в фиксированном моменте во времени, $t\Gamma = 2$. Как следует из данных результатов, при сближении гауссова импульса к возбужденному кубиту, пространственный кластер, в который объединяются оба фотона по итогу индуцированного излучения, становится более плотным и с более высокими значениями вероятности.

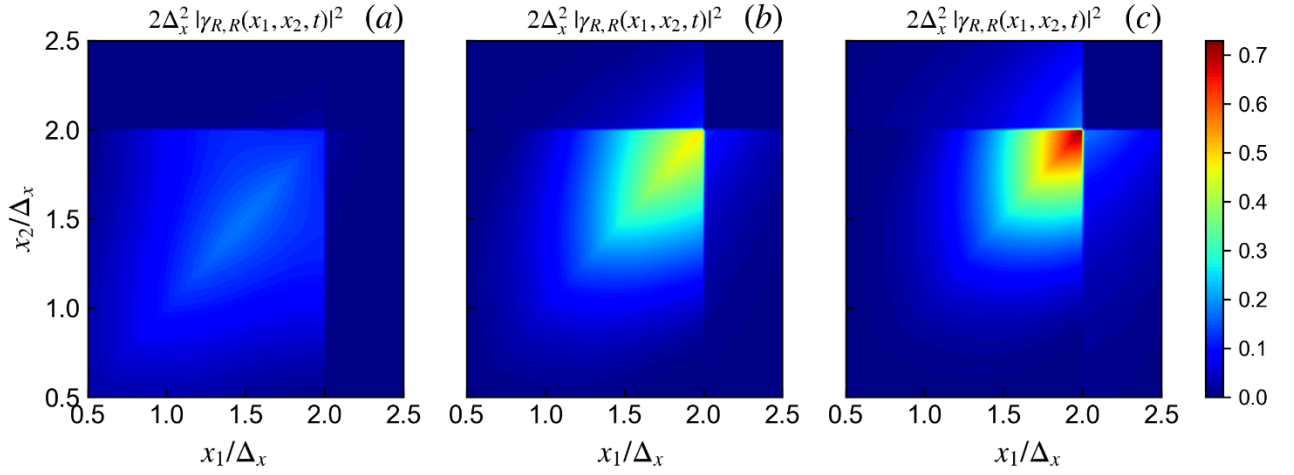


Рис. 3.11. Пространственное распределение двухфотонных полей с двумя движущимися вправо фотонами $2\Delta_x^2 |\gamma_{R,R}(x_1, x_2, t)|^2$ для различных начальных положений гауссова импульса: (a) $x_0 = \Delta_x$; (b) $x_0 = 0,5\Delta_x$ и (c) $x_0 = 0,2\Delta_x$. На каждом графике выбран один и тот же момент времени $t\Gamma = 2$, так что взаимодействие падающего фотона и кубита уже произошло. В отличие от предыдущих графиков, здесь цветная шкала имеет единый масштаб для всех рисунков. Остальные параметры: $\Gamma / \Omega = 0,02$; $\omega_0 / \Omega = 1$; $\Gamma \tau = 1$.

Наконец, интегрируя функции плотности для двухфотонных амплитуд по x_1 и x_2 , мы получаем зависящие от времени вероятности обнаружения двух фотонов во всем пространстве волновода. Эти вероятности показаны на рисунке 3.12: $P_{R,R}(t)$ соответствует тому, что оба фотона движутся вперед (красная сплошная линия), $P_{L,L}(t)$ соответствует обоим фотонам, движущимся назад (синяя пунктирная линия), а $P_{R,L}(t)$ соответствует тому, что фотоны распространяются в разных направлениях (зеленая пунктирная линия).

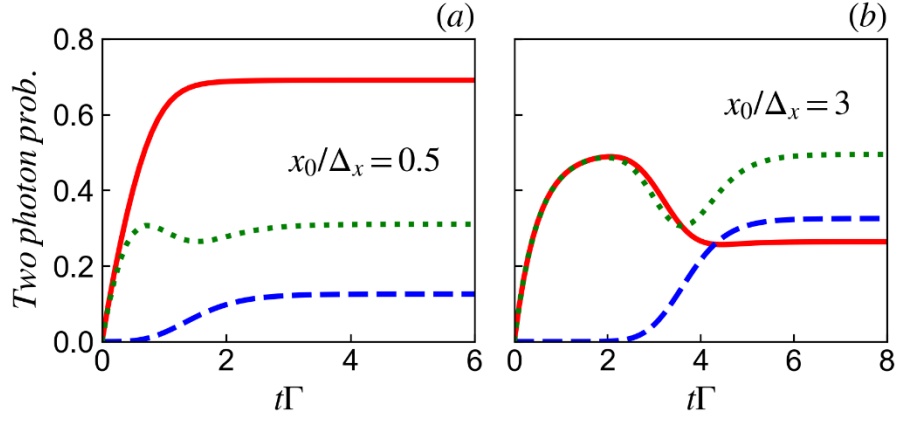


Рис. 3.12. Временная эволюция двухфотонных вероятностей (3.4.4b), посчитанная с помощью формул (3.4.23) для двух значений начального положения центра гауссова пакета: (a) $x_0/\Delta_x = 0,5$; (b) $x_0/\Delta_x = 3$. Красная сплошная линия - оба фотона движутся вперед, $P_{R,R}(t)$; синяя пунктирная линия - оба фотона движутся назад, $P_{L,L}(t)$; зеленая пунктирная линия - первый фотон движется вправо, а второй влево, $P_{R,L}(t)$. Остальные параметры: $\Gamma/\Omega = 0,02$; $\omega_0/\Omega = 1$; $\Gamma\tau = 1$.

Когда начальное положение пика гауссова импульса находится относительно далеко от местоположения кубита (рис. 3.12b), в течение короткого периода времени $t < 4/\Gamma$ происходит взаимодействие, после которого достигается некое подобие стационарного режима. Следует обратить внимание, что в течение периода времени $t < x_0/v_g$ до того, как импульс достигнет кубита, вероятности для двух движущихся вправо фотонов $P_{R,R}$ и для одного движущегося вправо и одного движущегося влево фотона $P_{R,L}$ идентичны (сравните красную и зеленую линии на рис. 3.12b). Это связано с равной вероятностью испускания кубитом спонтанного фотона влево или вправо, что для предела $x_0 \gg \Delta_x$ должно быть равно 0,5. После взаимодействия, $t > x_0/v_g$, когда вероятности перестают меняться со временем, мы наблюдаем, что вероятность для фотонов, движущихся в противоположных направлениях, составляет $\approx 0,5$, в то время как для двух фотонов, движущихся влево или вправо, оба составляют $\approx 0,25$. Эти числа также можно объяснить равными вероятностями для возбужденного кубита испускать фотоны в обоих направлениях, но на этот раз кубит повторно возбуждается из-за взаимодействия с падающим гауссовым пакетом. С повторным возбуждением также связан провал вероятности для зеленой линии на обоих графиках на рис. 3.12.

Совершенно иную картину мы получаем для гауссова импульса, изначально расположенного ближе к кубиту (рис. 3.12a). Здесь, после короткого времени взаимодействия, мы видим, что вероятность обнаружить оба фотона движущимися вправо более чем в четыре раза выше вероятности их движения влево $P_{R,R} \approx 0,68$; $P_{L,L} \approx 0,16$; и более чем в два раза выше вероятности их движения в противоположных направлениях ($P_{R,L} \approx 0,3$). Это фактически прямое

проявление вынужденного излучения – движущийся вправо фотон взаимодействует с возбужденным кубитом и вынуждает его испустить фотон в том же направлении. Этот эффект, очевидно, возникает, когда центр гауссова пика расположен ближе к кубиту, что дает ему достаточно времени для взаимодействия с кубитом до того, как он распадется в основное состояние.

3.5. Выводы к главе 3

В данной главе решена нестационарная задача по рассеянию фотонного импульса на одиночном кубите в одномерном открытом волноводе. Рассмотрены два случая: с одним возбуждением, когда фотон падает на кубит в основном состоянии, и с двумя возбуждениями, когда фотон рассеивается на возбужденном кубите. Для обоих режимов найдены аналитические выражения для амплитуд вероятностей полной волновой функции системы. Это позволило найти вероятности обнаружения прошедшего либо отраженного фотона, которые отличаются для разных состояний кубита, а также пространственное распределение фотонных полей в волноводе. Для обоих случаев рассмотрены два вида падающего поля: монохроматическая волна и гауссов импульс.

Показано, что для гауссова импульса вероятность прохождения фотона значительно изменяется в зависимости от состояния кубита, что можно использовать как основу для построения методики определения состояния кубита в открытом волноводе.

Анализируя двух-фотонные амплитуды вероятности, было подтверждено наличие в системе индуцированного излучения. Так, из сравнения двухфотонных вероятностей было получено, что вероятность того, что падающий фотон вынудит кубит испустить фотон в том же направлении, может быть более чем в два раза выше, чем в противоположном направлении. Этот эффект возникает, когда начальное местоположение падающего гауссова импульса достаточно близко к кубиту, чтобы он мог эффективно взаимодействовать с ним до того, как кубит распадется в основное состояние.

Из анализа пространственного распределения двух-фотонных полей также был выявлен интересный эффект. В случае, если начальный импульс расположен вблизи кубита, так что проявляется вынужденное излучение, оба фотона движущихся в прямом направлении локализуются в пространстве, т.е. высока вероятность обнаружить их рядом друг с другом. Данный эффект можно трактовать как пространственную группировку фотонов, вызванную индуцированным излучением при рассеянии гауссова импульса на возбужденном кубите.

Стоит также отметить, что разработанный здесь формализм для двух возбуждений позволяет изучать рассеяние двух-фотонных импульсов на кубите в основном состоянии, что также представляет определенный интерес для дальнейшей работы.

Заключение

Основные выводы и результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- С помощью оператора перехода были исследованы сверх-излучательные и суб-излучательные свойства спектров излучения фотонов для двухкубитной системы, связанной с одномерным открытым волноводом. Было получено общее выражение, позволяющее рассчитать спектры излучения для произвольной начальной конфигурации двухкубитной системы. Найдены явные аналитические выражения для спектров фотонного излучения и скоростей затухания излучения для различных исходных двухкубитных конфигураций с одним и двумя возбуждениями. Показано, что форма линий спектров фотонного излучения и скорость затухания излучения, то есть скорость потери энергии, существенно зависят от эффективного расстояния между кубитами $k_0 d$.

- Предложен и описан метод реконструкции запутанного состояния для системы из двух кубитов. Определение амплитуд вероятности для такого состояния возможно путем измерения скорости спонтанного распада Γ и спектра излучения на резонансной частоте для конкретной системы. Для определения фазы запутанного состояния требуется дополнительно измерить расстояние между двумя кубитами и спектр излучения на смещенной от резонанса частоте.

- Была решена нестационарная задача о рассеянии гауссова импульса на кубитной цепочке. В отличие от известных моделей, наш расчет позволяет обойти приближение, связанное с продлением частоты в отрицательную область, и как следствие позволяет описывать системы кубитов с меж-кубитными расстояниями $d \ll \lambda$.

- Показано, что в случае рассеяния гауссова пакета на кубитной цепочке, формы спектральных линий существенно зависят от расстояния между начальным положением гауссова импульса и первым кубитом в цепочке. Если это расстояние сравнимо или меньше, чем ширина импульса в конфигурационном пространстве, то спектральные линии начинают ощутимо отклоняться от известных результатов, полученных с условием продления кубит-фотонной связи в область отрицательных частот.

- Были получены аналитические выражения для случаев рассеяния произвольного фотонного поля на кубите в основном состоянии (одно возбуждение) и в возбужденном состоянии (два возбуждения). Выполнен сравнительный анализ для двух видов начальных полей – падающей монохроматической волны и гауссова импульса, из которого следуют значительные отличия в вероятностях прохождения фотона для кубита в разных состояниях. Данный эффект можно использовать для разработки экспериментальных методик по определению состояния кубита в открытом волноводе.

- Показано, что при рассеянии гауссова пакета на возбужденном кубите имеются явные признаки эффекта индуцированного излучения – вероятность того, что падающий фотон “вынудит” кубит излучить идентичный фотон в том же направлении, как минимум в два раза выше, чем прочие вероятности. Кроме того, при анализе двух-фотонных состояний был обнаружен эффект пространственной группировки фотонов, когда они локализируются в пространстве и образуют единый кластер. Оба этих эффекта проявляются для импульса, изначально расположенного вблизи кубита, и с его отдалением становятся менее выраженными.

Большинство выводов и теоретических формул диссертационной работы записано в общем виде без указания на конкретную физическую реализацию рассматриваемых систем, и таким образом может применяться не только для описания сверхпроводниковых кубитов в системах квантовой электродинамики на чипе (circuit QED), но и для других кубитных систем в одномерном пространстве (например, квантовые точки в наноплазмонных волноводах и др.).

Разработанные в данной диссертации нестационарные методы решения задач о транспорте фотонов через одно- и двух-кубитные системы естественным образом обобщаются на большее число кубитов, что является перспективной темой исследований для дальнейшей работы. Кроме того, значительный интерес представляет рассмотрение схожих задач, но для трех-уровневых систем (атомов), для которых процессы рассеяния и спонтанного распада в одномерном непрерывном волноводе имеют широкие перспективы применения как в теоретической, так и экспериментальной работе.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в реферируемых журналах:

- A1. Single-photon stimulated emission in waveguide quantum electrodynamics / O. A. Chuikin, Ya. S. Greenberg, A. A. Shtygashev, A. G. Moiseev // European Physical Journal B – 2024. – Vol. 97. – Art. 159.
- A2. Dynamical theory of single-photon transport through a qubit chain coupled to a one-dimensional nanophotonic waveguide / Ya. S. Greenberg, O. A. Chuikin, A. A. Shtygashev, A. G. Moiseev // Physica Scripta – 2024. – Vol. 99. – Art. 095119.
- A3. Superradiant emission spectra of a two-qubit system in circuit quantum electrodynamics / Ya. S. Greenberg, O. A. Chuikin // European Physical Journal B – 2022. – Vol. 95. P. 151.
- A4. Затухание вакуумных Раби осцилляций в двухкубитной структуре в высокочастотном резонаторе / О. А. Чуйкин, Я. С. Гринберг, А. А. Штыгашев // Физика Твердого тела. – 2020. – Т. 62, вып. 9, С. 1408–1415.

В сборниках трудов конференций:

- A5. Вакуумные Раби осцилляции в двухкубитной структуре / О. А. Чуйкин, Я. С. Гринберг, А. А. Штыгашев // Наноп физика и Нанoeлектроника : Труды XXIV международного симпозиума, Нижний Новгород, 10–13 марта 2020 г. В 2 т. – Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2020. – Том 1. – С. 134-135.
- A6. Спонтанный распад индивидуальных атомов в многокубитной системе / О. А. Чуйкин, Я. С. Гринберг // Наноп физика и Нанoeлектроника : Труды XXV международного симпозиума, Нижний Новгород, 9–12 марта 2021 г. В 2 т. – Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2021. – Том 1. – С. 42-43.
- A7. Расчет корреляционных спектров при излучении кубитов в открытом волноводе / О. А. Чуйкин, Я. С. Гринберг // Наноп физика и Нанoeлектроника : Труды XXVI международного симпозиума, Нижний Новгород, 14–17 марта 2022 г. В 2 т. – Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2022. – Том 1. – С. 157-158.
- A8. Реконструкция запутанного состояния двух кубитов с помощью измерения спектра излучения / О. А. Чуйкин, Я. С. Гринберг // Наноп физика и Нанoeлектроника : Труды XXVII международного симпозиума, Нижний Новгород, 13–16 марта 2023 г. В 2 т. – Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2023. – Том 1. – С. 125-126.

- A9. Динамическая теория рассеяния гауссова однофотонного импульса на кубитной цепочке / Я. С. Гринберг, О. А. Чуйкин, А. А. Штыгашев, А. Г. Моисеев // 17 всероссийская научная конференция “Физика ультрахолодных атомов” (ФУХА-2023) : тезисы докладов, Новосибирск, 18-20 декабря 2023 г. С. 58. - ISBN: 978-5-85957-211-3.
- A10. Динамическая теория однофотонного транспорта в одномерном волноводе / Я. С. Гринберг, О. А. Чуйкин, А. А. Штыгашев, А. Г. Моисеев // Нанопфизика и Нанопэлектроника : Труды XXVIII международного симпозиума, Нижний Новгород, 11–15 марта 2024 г. В 2 т. – Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2024. – Том 1. – С. 38-39.
- A11. Однофотонное индуцированное излучение в системе кубит-волновод / О. А. Чуйкин, Я. С. Гринберг, А. А. Штыгашев, А. Г. Моисеев // 18 всероссийская научная конференция “Физика ультрахолодных атомов” (ФУХА-2024) : тезисы докладов, Новосибирск, 16-18 декабря 2024 г. С.53. - ISBN: 978-5-85957-226-7.
- A12. Квантовые корреляции фотонных амплитуд в одномерной квантовой электродинамике / Я. С. Гринберг, О. А. Чуйкин, А. Г. Моисеев, А. А. Штыгашев // 18 всероссийская научная конференция “Физика ультрахолодных атомов” (ФУХА-2024) : тезисы докладов, Новосибирск, 16-18 декабря 2024 г. С.3. - ISBN: 978-5-85957-226-7.
- A13. Квантовые корреляции фотонных полей в квантовой электродинамике одномерных волноводных структур / Я. С. Гринберг, О. А. Чуйкин, А. А. Штыгашев, А. Г. Моисеев // Нанопфизика и Нанопэлектроника : Труды XXIX международного симпозиума, Нижний Новгород, 10–14 марта 2025 г. – Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2025. – С. 34.

Список литературы

- Астафьев23 Астафьев, Олег Владимирович. Квантовая оптика на искусственных квантовых системах: диссертация ... доктора физико-математических наук: 1.3.8. / Астафьев О. В.; [Место защиты: ФГБУН Институт физики твердого тела имени Ю.А. Осипьяна Российской академии наук; Диссовет 24.1.136.01 (Д 002.100.02)]. — Черногловка, 2023. — 432 с. : ил..
- Гайдаш23 Гайдаш, А. А. Квантовые технологии / А. А. Гайдаш, В. И. Егоров, А. Е. Иванова, А. В. Козубов, С. М. Кынев, Б. А. Наседкин, Э. О. Самсонов — СПб: Университет ИТМО, 2023 г.
- Гринберг06 Гринберг, Я. С. Элементарное введение в основы квантовой информатики / Я. С. Гринберг — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006 г.
- Ильичев13 Ильичев, Е. В. Квантовая информатика и квантовые биты на основе сверхпроводниковых джозефсоновских структур / Е. В. Ильичев и Я. С. Гринберг — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2013 г
- Ильичев18 Ильичев, Е. В. Введение в динамику сверхпроводниковых квантовых цепей / Е. В. Ильичев — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2018 г.
- Каку24 Каку, М. Квантовое превосходство: революция в вычислениях, которая изменит все / Митио Каку — пер. с англ. — М.: Альпина нон-фикшн, 2024. — 412 с.
- Макаров03 Макаров, А. А. Спонтанный распад в системе из двух пространственно-разнесенных атомов (одномерный случай) / А. А. Макаров, В. С. Летохов // ЖЭТФ — 2003. — том 124. — вып. 4(10). — стр. 766-780.
- Нильсен06 Нильсен, М. Квантовые вычисления и квантовая информация / М. Нильсен, И. Чанг - Пер. с. англ. — М: Мир, 2006 г.
- Скалли03 Скалли, М. О. Квантовая оптика / М. О. Скалли и М. С. Зубайри — Пер. с. англ. / Под ред. В.В. Самарцева. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003г.
- Тинкхам80 Тинкхам М. Введение в сверхпроводимость / М. Тинкхам — пер. с англ. — М.: Атомиздат, 1980 г. — стр. 208-247.
- Abdumalikov10 Abdumalikov, A. A., Jr. Electromagnetically Induced Transparency on a Single Artificial Atom / A. A. Abdumalikov, Jr., O. Astafiev, A. M. Zagoskin, Yu. A. Pashkin, Y. Nakamura and J. S. Tsai // Phys. Rev. Lett. — 2010. — V. 104. — Art. 193601.

- Albrecht19 Albrecht, A. Subradiant states of quantum bits coupled to a one-dimensional waveguide / A. Albrecht, L. Henriot, A. Asenjo-Garcia, P. B. Dieterle, O. Painter, and D. E. Chang // *New J. Phys.* – 2019. – V. 21. – Art. 025003.
- Arute19 Arute, F. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor / F. Arute [et al.] // *Nature* – 2019. – V. 574. – Art. 505.
- Asaoka22 Asaoka, R. Stimulated emission of superradiant atoms in waveguide quantum electrodynamics / R. Asaoka, J. Gea-Banacloche, Y. Tokunaga, K. Koshino // *Phys. Rev. Appl.* – 2022. – V. 18. – Art. 064006.
- Astafiev07 Astafiev, O. Single artificial-atom lasing / O. Astafiev, K. Inomata, A.O. Niskanen, T. Yamamoto, Y.A. Pashkin, Y. Nakamura, J.S. Tsai // *Nature* – 2007. – V. 449 – P. 588.
- Astafiev10 Astafiev, O. Resonance fluorescence of a single artificial atom / O. Astafiev, A.M. Zagoskin, A.A. Abdumalikov, Y.A. Pashkin, T. Yamamoto, K. Inomata, Y. Nakamura, J.S. Tsai // *Science* – 2010. – V. 327 – P. 840.
- Baur09 Baur, M. Measurement of Autler-Townes and Mollow transitions in a strongly driven superconducting qubit / M. Baur, S. Filipp, R. Bianchetti, J.M. Fink, M. Göppl et al // *Phys. Rev. Lett.* – 2009. – V. 102 – Art. 243602.
- Blais04 Blais, A. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: an architecture for quantum computation / A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin, R. J. Schoelkopf // *Phys. Rev. A* – 2004. – V. 69. – Art. 062320.
- Blais21 Blais, A. Circuit quantum electrodynamics / A. Blais, A. L. Grimsom, S. M. Girvin, and A. Wallraff // *Rev. Mod. Phys.* – 2021. – V. 93. – Art. 025005.
- Blow90 Blow, K. J. Continuum fields in quantum optics / K. J. Blow, R. Loudon, and S. J. D. Phoenix // *Phys. Rev. A* – 1990. V. 42. – pp. 4102-4114.
- Brehm21 Brehm, J. D. Waveguide bandgap engineering with an array of superconducting qubits / J. D. Brehm, A. N. Poddubny, A. Stehli, T. Wolz, H. Rotzinger, and A. V. Ustinov // *npj Quantum Materials* – 2021. – V. 6. – no. 10.
- Bruzewicz19 Bruzewicz, C. D. Trapped-ion quantum computing: progress and challenges / C. D. Bruzewicz, J. Chiaverini, R. McConnell, J. M. Sage // *Appl. Phys. Rev.* – 2019. – V. 6. – iss. 2. – Art. 021314.
- Buluta11 Buluta, I. Natural and artificial atoms for quantum computation / I. Buluta, S. Ashhab and F. Nori // *Rep. Prog. Phys.* - 2011. – V. 74. – Art. 104401.

- Casariego23 Casariego, M. Propagating quantum microwaves: towards applications in communication and sensing / Mateo Casariego [et al] // Quantum Sci. Technol. – 2023. – V. 8 – Art. 023001.
- Castelvecchi23 Castelvecchi, D. IBM releases first-ever 1,000-qubit quantum chip / D. Castelvecchi // Nature – 2023. – V. 624. – pp. 238.
- Caves82 Caves, C. M. Quantum limits on noise in linear amplifiers / C. M. Caves // Phys. Rev. D – 1982. – V. 26. – P. 1817.
- Chang12 Chang, D. E. Cavity QED with atomic mirrors / D. E. Chang, L. Jiang, A. V. Gorshkov, and H. J. Kimble // New J. Phys. – 2012. – V. 14. – Art. 063003.
- Chatterjee21 Chatterjee, A. Semiconductor qubits in practice / A. Chatterjee, P. Stevenson, S. De Franceschi, A. Morello, N. P. de Leon, F. Kuemmeth // Nature Reviews Physics – 2021. – V. 3 – P. 157.
- Chen11 Chen, Y. Coherent single-photon absorption by single emitters coupled to one-dimensional nanophotonic waveguides / Y. Chen, M. Wubs, J. Mork, and A. F. Koendrink // New J. Phys. – 2011. – V. 13. – Art. 103010.
- Cheng17 Cheng, M.-T. Waveguide transport mediated by strong coupling with atoms / M.-T. Cheng, J. Xu, and G. S. Agarwal // Phys. Rev. A – 2017. – V. 95. – Art. 053807.
- Clarke08 Clarke, J. Superconducting quantum bits / J. Clarke, F. K. Wilhelm // Nature – 2008. – V. 453. – Art. 1031.
- Cohen-Tannoudji04 Cohen-Tannoudji, C. Atom-photon interactions: basic processes and applications / C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg - Wiley-VCH GmbH and Co., 2004. - P. 244.
- Cong16 Cong, K. Dicke superradiance in solids / K. Cong, Q. Zhang, Y. Wang, G. T. Noe II, A. Belyanin, and J. Kono // J. Opt. Soc. Am. B – 2016. – V. 33. Art. C80.
- Delanty11 Delanty, M. Superradiance and phase multistability in circuit quantum electrodynamics / M. Delanty, S. Rebic and J. Twamley // New J. Phys. – 2011. – V. 13. – Art. 053032.
- Derouault14 Derouault, S. One-photon wave packet interacting with two separated atoms in a one-dimensional waveguide: Influence of virtual photons / S. Derouault and M. A. Bouchene // Phys. Rev. A – 2014. – V. 90. – Art. 023828.
- Devoret13 Devoret, M. H. Superconducting circuits for quantum information: an outlook / M. H. Devoret and R. J. Schoelkopf // Science – 2013. – V. 339. – P. 1169.

- Diaz-Camacho15 Diaz-Camacho, G. Photon-mediated qubit interactions in one-dimensional discrete and continuous models / G. Diaz-Camacho, D. Porras, and J. J. Garcia-Ripoll // *Phys. Rev. A* – 2015. – V. 91. – Art. 063828.
- Dicke54 Dicke, R. H. Coherence in Spontaneous Radiation Processes / R. H. Dicke // *Phys. Rev.* – 1954. – V. 93. – P. 99.
- Domokos02 Domokos, P. Quantum description of light-pulse scattering on a single atom in waveguides / P. Domokos, P. Horak, and H. Ritsch // *Phys. Rev. A* – 2002. – V. 65. – Art. 033832.
- Dowling03 Dowling, G. P. Quantum technology: the second quantum revolution / G. P. Dowling, G. Milburn // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* – 2003. – V. 361. – P. 1655.
- Drobny00 Drobny, G. Stimulated emission via quantum interference: scattering of one-photon packets on an atom in a ground state / G. Drobny, T.M. Havukainen, V. Buzek // *J. Mod. Optics* – 2000. – V. 47. – P. 851.
- Dutt07 Dutt, G. M. V. Quantum register based on individual electronic and nuclear spin qubits in diamond / M. V. Gurudev Dutt, L. Childress, L. Jiang, E. Togan, J. Maze, F. Jelezko, A. S. Zibrov, P. R. Hemmer, M. D. Lukin // *Science* – 2007. – V. 316. – P. 1312.
- Eichler12 Eichler, C. Characterizing quantum microwave radiation and its entanglement with superconducting qubits using linear detectors / C. Eichler, D. Bozyigit, A. Wallraff // *Phys. Rev. A* – 2012. – V. 86. – Art. 032106.
- Einstein17 Einstein, A. The quantum theory of radiation / A. Einstein // *Phys. Z.* – 1917. – V. 18. – P. 121.
- Ezratty24 Ezratty, O. Understanding quantum technologies [Электронный ресурс] / O. Ezratty // *arXiv.org* – 2024. – no. 2111.15352.
- Fan10 Fan, S. Input-output formalism for few-photon transport in one-dimensional nanophotonic waveguides coupled to a qubit / S. Fan, S. E. Kocabas, and J.-T. Shen // *Phys. Rev. A* – 2010. – V. 82. – Art. 063821.
- Fang14 Fang, Y.-L. L. One-dimensional waveguide coupled to multiple qubits photon-photon correlations / Y.-L. L. Fang, H. Zheng, and H. U. Baranger // *npj Quantum Technol.* – 2014. – V. 1, - no. 3.
- Fang18 Fang, Y. -L. L. Non-Markovian dynamics of a qubit due to single-photon scattering in a waveguide / Y.-L.L. Fang, F. Ciccarello, H.U. Baranger // *New J. Phys.* – 2018. – V. 20. – Art. 043035.

- Fedorov22 Fedorov, A. K. Quantum computing at the quantum advantage threshold: a down-to-business review [Электронный ресурс] / A. K. Fedorov, N. Gisin, S. M. Beloussov, A. I. Lvovsky // arXiv.org – 2022. – no. 2203.17181.
- Ficek02 Ficek, Z. Entangled states and collective non-classical effects in two-atom systems / Z. Ficek and R. Tanas // Phys. Reports – 2002. – V. 372. – P. 369.
- Ficek90 Ficek, Z. Quantum beats in two-atom resonance fluorescence / Z. Ficek and B. C. Sanders // Phys. Rev. A – 1990. – V. 41. – P. 359.
- Fischer18 Fischer, K. A. Exact calculation of stimulated emission driven by pulsed light / K.A. Fischer // OSA Continuum – 2018. – V. 1. – P. 772.
- Gardiner85 Gardiner, C. W. Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation / C. W. Gardiner and M. J. Collett // Phys. Rev. A – 1985. – V. 31. – pp. 3761.
- Georgescu12 Georgescu, I. Quantum technologies: an old new story / Iulia Georgescu and Franco Nori // Phys. World – 2012. – V. 25 – no. 05. – P. 16.
- Gisin02 Gisin, N. Quantum cryptography / N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, H. Zbinden // Rev. Mod. Phys. – 2002. – V. 74. – Art. 145.
- Gisin07 Gisin, N. Quantum communication / N. Gisin and R. Thew // Nature Photonics – 2007. – V. 1. – P. 165.
- Gonzalez13 Gonzalez-Tudela, A. Mesoscopic entanglement induced by spontaneous emission in solid-state quantum optics / A. Gonzalez-Tudela and D. Porras // Phys. Rev. Lett. – 2013. – V. 110. – Art. 080502.
- Goppl08 Göppl, M. Coplanar waveguide resonators for circuit quantum electrodynamics / M. Göppl, A. Fragner, M. Baur, R. Bianchetti, S. Filipp et al // J. Appl. Phys. – 2008. – V. 104. – Art. 113904.
- Greenberg15 Greenberg, Ya. S. Non-hermitian Hamiltonian approach to the microwave transmission through a one-dimensional qubit chain / Ya. S. Greenberg and A. A. Shtygashev // Phys. Rev. A – 2015. – V. 92. – Art. 063835.
- Greenberg18 Greenberg, Ya. S. The pulsed excitation in two-qubit systems / Ya. S. Greenberg & A. A. Shtygashev // Phys. of Solid State – 2018. – V. 60. – iss. 11. – P. 2109.
- Greenberg21a Greenberg, Ya. S. Waveguide band-gap N-qubit array with a tunable transparency resonance / Ya. S. Greenberg // Phys. Rev. A – 2021. – V. 103. – Art. 023508.

- Greenberg21b Greenberg, Ya. S. Spontaneous decay of artificial atoms in a three-qubit system / Ya. S. Greenberg, A. A. Shtygashev and A. G. Moiseev // *Eur. Phys. J. B* – 2021. – V. 94. – P. 221.
- Greenberg23 Greenberg, Ya. S. Single-photon scattering on a qubit: Space-time structure of the scattered field / Ya. S. Greenberg, A. G. Moiseev, and A. A. Shtygashev // *Phys. Rev. A* – 2023. – V. 107. – Art. 013519.
- Gross82 Gross, M. Superradiance: an essay on the theory of collective spontaneous emission / M. Gross and S. Haroche // *Phys. Rep.* – 1982. – V. 93. – P. 301.
- Gu17 Gu, X. Microwave photonics with superconducting quantum circuits / X. Gu, A. F. Kockum, A. Miranowicz, Yu-xi Liu and F. Nori // *Phys. Rep.* - 2017. – V. 718-719. – pp. 1-102.
- Heitler54 Heitler, W. *The Quantum Theory of Radiation* / W. Heitler - Oxford University Press, Oxford, 1954.
- Henriet20 Henriet, L. Quantum computing with neutral atoms / L. Henriet, L. Beguin, A. Signoles, T. Lahaye, A. Browaeys, G.-O. Reymond, C. Jurczak // *Quantum* – 2020. – V. 4. – P. 327.
- Hoi13 Hoi, I.-C. Microwave quantum optics with an artificial atom in one-dimensional open space / I.-C. Hoi, C M Wilson, G. Johansson, J. Lindkvist, B. Peropadre, T. Palomaki and P. Delsing // *New J. Phys.* – 2013. – V. 15 – Art. 025011.
- Hu23 Hu, R. Distance-dependent emission spectrum from two qubits in a strong-coupling regime / Rongzhen Hu, JunYan Luo, and Yiying Yan // *Phys. Rev. A* – 2023. – V. 108. – Art. 023706.
- Huang13 Huang, J.-F. Controlling single-photon transport in waveguides with finite cross section / J.-F. Huang, T. Shi, C. P. Sun, and F. Nori // *Phys. Rev. A* – 2013. – V. 88. – Art. 013836.
- Kane98 Kane, B. E. A silicon-based nuclear spin quantum computer/ B. E. Kane // *Nature* – 1998. – V. 393. – P. 133.
- Kannan20 Kannan, B. Generating spatially entangled itinerant photons with waveguide quantum electrodynamics / B. Kannan [et al.] // *Sci. Adv.* – 2020. – V. 6. – no. eabb8780.
- Kien05 Kien, F. L. Nanofiber-mediated radiative transfer between two distant atom / F. L. Kien, S. D. Gupta, K. P. Nayak, and K. Hakuta // *Phys. Rev. A* – 2005. – V. 72. – Art. 063815.

- Kiilerich19 Kiilerich, A. H. Input-Output Theory with Quantum Pulses / A. H. Kiilerich and K. Molmer // *Phys. Rev. Lett.* – 2019. – V. 123. – Art. 123604.
- Kimble08 Kimble, H. J. The quantum internet / H. J. Kimble / *Nature* – 2008. – V. 453. – P. 1023.
- Kjaergaard20 Kjaergaard, M. Superconducting qubits: current state of play / M. Kjaergaard, M. E. Schwartz, J. Braumuller, P. Krantz, Joel I.-J. Wang, S. Gustavsson, and W. D. Oliver // *Ann. Rev. Condensed Matter Phys.* – 2020. – V. 11. – pp. 369-395.
- Knill01 Knill, E. A scheme for efficient quantum computation with linear optics / E. Knill, R. Laflamme & G. J. Milburn // *Nature* – 2001. – V. 409. – P. 46.
- Koch07 Koch, J. Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box / J. Koch et al // *Phys. Rev. A* – 2007. – V. 76. – Art. 042319.
- Konyk16 Konyk, W. Quantum multimode treatment of light scattering by an atom in a waveguide / W. Konyk and J. Gea-Banachloche // *Phys. Rev. A* – 2016. – V. 93. – Art. 063807.
- Krantz19 Krantz, P. A quantum engineer's guide to superconducting qubits / P. Krantz, M. Kjaergaard, F. Yan, T. P. Orlando, S. Gustavsson, and W. D. Oliver // *Appl. Phys. Rev.* – 2019. – V. 6. – Art. 021318.
- Kuraptsev15 Kuraptsev, A. S. Reflection of resonant light from a plane surface of an ensemble of motionless point scatters: Quantum microscopic approach / A. S. Kuraptsev and I. M. Sokolov // *Phys. Rev. A* – 2015. – V. 91. – Art. 053822.
- Kuraptsev16 Kuraptsev, A. S. Microscopic Theory of Dipole-Dipole Interaction in Ensembles of Impurity Atoms in a Fabry-Perot Cavity / A. S. Kuraptsev and I. M. Sokolov // *J. Exp. Theor. Phys.* – 2016. – V. 123. – P. 237.
- Ladd10 Ladd, T. D. Quantum computers / T. D. Ladd, F. Jelezko, R. Laflamme, Y. Nakamura, C. Monroe & J. L. O'Brien // *Nature* – 2010. – V. 464. – P. 45.
- Lalumiere13 Lalumiere, K. Input-output theory for waveguide QED with an ensemble of inhomogeneous atoms / K. Lalumiere, B. C. Sanders, A. F. van Loo, A. Fedorov, A. Wallraff and A. Blais // *Phys. Rev. A* – 2013. – V. 88. – Art. 043806.
- Lamas01 Lamas-Linares, A. Stimulated emission of polarization-entangled photons / A. Lamas-Linares, J.C. Howell, D. Bouwmeester // *Nature (London)* – 2001. – V. 412. – P. 887.

- Lamas02 Lamas-Linares, A. Experimental quantum cloning of single photons / A. Lamas-Linares, C. Simon, J.C. Howell, D. Bouwmeester // *Science* – 2002. – V. 296. – P. 712.
- Lambert16 Lambert, N. Superradiance with an ensemble of superconducting flux qubits / N. Lambert, Y. Matsuzaki, K. Kakuyanagi, N. Ishida, S. Saito, and F. Nori // *Phys. Rev. B* – 2016. – V. 94. – Art. 224510.
- Lecocq21 Lecocq, F. Control and readout of a superconducting qubit using a photonic link / F. Lecocq, F. Quinlan, K. Cicak, J. Aumentado, S. A. Diddams, J. D. Teufel // *Nature* – 2021. – V. 591. – P. 575.
- Lehmberg69 Lehmberg, R. H. Transition operators in radiative damping theory / R. H. Lehmberg // *Phys. Rev.* – 1969. – V. 181. - N. 1. – pp. 32-38.
- Lehmberg70a Lehmberg, R. H. Radiation from an N-Atom system. I. General formalism / R. H. Lehmberg // *Phys. Rev. A* – 1970. – V. 2. – P. 883.
- Lehmberg70b Lehmberg, R. H. Radiation from an N-atom system. II. Spontaneous emission from a pair of atoms / R. H. Lehmberg // *Phys. Rev. A* – 1970. – V. 2. – P. 889.
- Leibfried03 Leibfried, D. Quantum dynamics of single trapped ions / D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland // *Rev. Mod. Phys.* – 2003. – V. 75. – Art. 281.
- Lenz93 Lenz, G. Resonance fluorescence from two identical atoms in a standing-wave field / G. Lenz and P. Meystre // *Phys. Rev A* – 1993. – V. 48. – P. 3365.
- Liao15 Liao, Z. Single-photon transport through an atomic chain coupled to a one-dimensional nanophotonic waveguide / Z. Liao, X. Zeng, S.-Y. Zhu, and M. S. Zubairy // *Phys. Rev. A* – 2015. – V. 92. – Art. 023806.
- Liao16a Liao, Z. Dynamical theory of single-photon transport in a one-dimensional waveguide coupled to identical and nonidentical emitters / Z. Liao, H. Nha, and M. S. Zubairy // *Phys. Rev. A* – 2016. – V. 94. – Art. 053842.
- Liao16b Liao, Z. Photon transport in a one-dimensional nanophotonic waveguide QED system / Z. Liao, X. Zeng, H. Nha, and M. S. Zubairy // *Phys. Scr.* – 2016. – V. 91. – Art. 063004.
- Liu16 Liu, Q.-C. Method for identifying electromagnetically induced transparency in a tunable circuit quantum electrodynamics system / Q.-C. Liu, T.-F. Li, X.-Q. Luo, H. Zhao, W. Xiong et al // *Phys. Rev. A* – 2016. – V. 93. – Art. 053838.
- Lopes24 Lopes da Silva, W. Exact solution of a lambda quantum system driven by a two-photon wave packet / W. Lopes da Silva, D. Valente // *J. Opt. Soc. Am. B* – 2024. – V. 41. – Art. C1–C8.

- Loss98 Loss, D. Quantum computation with quantum dots / D. Loss & D. P. DiVincenzo // Phys. Rev. A – 1998. – V. 57. – P. 120.
- Martin24 Martin, N. J. Topological and conventional nanophotonic waveguides for directional integrated quantum optics / N. J. Martin [et al] // Phys. Rev. Research – 2024. – V. 6. – Art. L022065.
- Mirhosseini19 Mirhosseini, M. Cavity quantum electrodynamics with atom-like mirrors / M. Mirhosseini, E. Kim, X. Zhang, A. Sipahigil, P. B. Dieterle, A. J. Keller, A. Asenjo-Garcia, D. E. Chang, and O. Painter // Nature – 2019. – V. 569. – Art. 692.
- Miroshnichenko10 Miroshnichenko, A. E. Fano resonances in nanoscale structures / A. E. Miroshnichenko, S. Flach and Y. S. Kivshar // Rev. Mod. Phys. – 2010. – V. 82. – No. 3. – P. 2257.
- Mlynek14 Mlynek, J. A. Observation of Dicke superradiance for two artificial atoms in a cavity with high decay rate / J. A. Mlynek, A. A. Abdumalikov, C. Eichler and A. Wallraff // Nat. Comm. – 2014. – V. 5. -P. 5186.
- Mukhopadhyay19 Mukhopadhyay, D. Multiple Fano interferences due to waveguide-mediated phase coupling between atoms / D. Mukhopadhyay and G. S. Agarwal // Phys. Rev. A – 2019. – V. 100. – Art. 013812.
- Mukhopadhyay24 Mukhopadhyay, D. Quantum Multiphoton Rabi Oscillations in Waveguide QED / D. Mukhopadhyay & J.-T. Shen // New J. Phys. – 2024. – V. 26. – Art. 103026.
- Novikov16 Novikov, S. Raman coherence in a circuit quantum electrodynamics lambda system / S. Novikov, T. Sweeney, J.E. Robinson, S.P. Premaratne, B. Suri, F.C. Wellstood, B.S. Palmer // Nat. Phys. – 2016. – V. 12 – P. 75.
- Nysteen15 Nysteen, A. Scattering of two photons on a quantum emitter in a one-dimensional waveguide: exact dynamics and induced correlations / A. Nysteen, P.T. Kristensen, D. McCutcheon, P. Kaer, J. Mork // New J. Phys. – 2015. – V. 17. – Art. 023030.
- Ordonez04 Ordonez, G. Complex collective states in a one-dimensional two-atom system / G. Ordonez and S. Kim // Phys. Rev. A – 2004. – V. 70. – Art. 032702.
- Preskill18 Preskill, J. Quantum Computing in the NISQ era and beyond / J. Preskill // Quantum – 2018. – V. 2. – P. 79.
- Purcell46 Purcell, E. M. Spontaneous Emission Probabilities at Radio Frequencies / E. M. Purcell // Phys. Rev. – 1946. – V. 69. – P. 681.

- Rephaeli10 Rephaeli, E. Full inversion of a two-level atom with a single-photon pulse in one-dimensional geometries / E. Rephaeli, J.-T. Shen, and S. Fan // *Phys. Rev. A* – 2010. – V. 82. – Art. 033804.
- Rephaeli12 Rephaeli, E. Stimulated emission from a single excited atom in a waveguide / E. Rephaeli and S. Fan // *Phys. Rev. Lett.* – 2012. – V. 108. – Art. 143602.
- Roulet16 Roulet, A. Solving the scattering of N photons on a two-level atom without computation / A. Roulet and V. Scarani // *New J. Phys.* – 2016. – V. 18. – Art. 093035.
- Roy11 Roy, D. Correlated few-photon transport in one-dimensional waveguides: Linear and nonlinear dispersions / D. Roy // *Phys. Rev. A* – 2011. – V. 83. – Art. 043823.
- Roy17 Roy, D. Strongly interacting photons in one-dimensional continuum / D. Roy, C. M. Wilson, and O. Firstenberg // *Rev. Mod. Phys.* – 2017. – V. 89. – Art. 021001.
- Rudolph95 Rudolph, T. G. Two-atom resonance fluorescence in running- and standing-wave laser fields / T. G. Rudolph, Z. Ficek, and B. J. Dalton // *Phys. Rev A* – 1995. – V. 52. – P. 636.
- Rudolph17 Rudolph, T. Why I am optimistic about the silicon-photonics route to quantum computing / T. Rudolph // *APL Photonics* – 2017. – V. 2. – Art. 030901.
- Ruostekoski17 Ruostekoski, J. Arrays of strongly coupled atoms in a one-dimensional waveguide / J. Ruostekoski and J. Javanainen // *Phys. Rev. A* – 2017. – V. 96. – Art. 033857.
- Schlosshauer07 Schlosshauer M. Decoherence and the quantum-to-classical transition / M. Schlosshauer. - Springer, 2007.
- Schoelkopf08 Schoelkopf, R. J. Wiring up quantum systems / R. J. Schoelkopf and S. M. Girvin // *Nature* – 2008. – V. 451. – P.664.
- Scully09 Scully, M. O. The Super of Superradiance / M. O. Scully and A. A. Svidzinsky // *Science* – 2009. – V. 325. – P. 1510.
- Shen05a Shen, J.-T. Coherent photon transport from spontaneous emission in one-dimensional waveguides / J.-T. Shen and S. Fan // *Optics Letters* – 2005. – V. 30. – P. 2001.
- Shen05b Shen, J.-T. Coherent Single Photon Transport in a One-Dimensional Waveguide Coupled with superconducting Quantum Bits / J.-T. Shen and S. Fan // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – V. 95. – Art. 213001.

- Shen07a Shen, J.-T. Strongly Correlated Two-Photon Transport in a One-Dimensional Waveguide Coupled to a Two-Level System / J.-T. Shen and S. Fan // Phys. Rev. Lett. – 2007. – V. 98. – Art. 153003.
- Shen07b Shen, J.-T. Strongly correlated multiparticle transport in one dimension through a quantum impurity / J.-T. Shen and S. Fan // Phys. Rev. A – 2007. – V. 76. – Art. 062709.
- Shen09 Shen, J.-T. Theory of single-photon transport in a single-mode waveguide. I. Coupling to a cavity containing a two-level atom / J.-T. Shen and S. Fan // Phys. Rev. A – 2009. – V. 79. – Art. 023837.
- Sheremet23 Sheremet, A. S. Waveguide quantum electrodynamics: Collective radiance and photon-photon correlations / A. S. Sheremet, M. I. Petrov, I. V. Iorsh, A. V. Poshakinskiy, and A. N. Poddubny // Rev. Mod. Phys. – 2023. – V. 95. – Art. 015002.
- Sillanpaa09 Sillanpää, M. A. Autler-Townes effect in a superconducting three-level system / M.A. Sillanpää, J. Li, K. Cicak, F. Altomare, J.I. Park, R.W. Simmonds, G.S. Paraoanu, P.J. Hakonen // Phys. Rev. Lett. – 2009. – V. 103 –Art. 193601.
- Sokolov11 Sokolov, I. M. Microscopic Theory of Scattering of Weak Electromagnetic Radiation by a Dense Ensemble of Ultracold Atoms / I. M. Sokolov, D. V. Kupriyanov, and M.D. Havey // J. Exp, Theor. Phys. – 2011. – V. 112. – P. 246.
- Stobinska09 Stobinska, M. Perfect excitation of a matter qubit by a single photon in free space / M. Stobinska, G. Alber, and G. Leuchs // Europhysics Letters – 2009. – V. 86. – Art. 14007.
- Sun07 Sun, F. W. Stimulated emission as a result of multiphoton interference / F.W. Sun, B.H. Liu, Y.X. Gong, Y.F. Huang, Z.Y. Ou, G.C. Guo // Phys. Rev. Lett. – 2007. – V. 99. – Art. 043601.
- Tsoi08 Tsoi, T. S. Quantum interference effects of a single photon interacting with an atomic chain / T. S. Tsoi and C. K. Law // Phys. Rev. A – 2008. – V. 78. – Art. 063832.
- vanLoo13 van Loo, A. F. Photon-mediated interactions between distant artificial atoms / A. F. van Loo, A. Fedorov, K. Lalumiere, B. C. Sanders, A. Blais, A. Wallraff // Science – 2013. – V. 342. P. 1494.
- Valente12a Valente, D. Y. Optimal irreversible stimulated emission / D. Valente [et al] // New J. Phys. – 2012. – V. 14. – Art. 083029.

- Valente12b Valente, D. Monitoring stimulated emission at the single-photon level in one-dimensional atoms / D. Valente [et al] // Phys. Rev. A – 2012. – V. 85. – Art. 023811.
- Wendin17 Wendin, G. Quantum information processing with superconducting circuits: a review / G. Wendin // Rep. Prog. Phys. – 2017. – V. 80. – Art. 106001.
- You11 You, J. Q. Atomic physics and quantum optics using superconducting circuits / J. Q. You and Franco Nori // Nature – 2011. – V. 474. – P. 589.
- Zhang19 Zhang, Y.-X. Theory of subradiant states of a one-dimensional two-level atom chain / Y.-X. Zhang and K. Molmer // Phys. Rev. Lett. – 2019. – V. 122. – Art. 203605.
- Zheng13 Zheng, H. Persistent Quantum Beats and Long-Distance Entanglement from Waveguide-Mediated Interactions / H. Zheng and H. U. Baranger // Phys. Rev. Lett. – 2013. – V. 110. – Art. 113601.

Приложение А. Некоторые расчеты для динамической теории рассеяния

А1. Вывод выражения для коэффициента $G(kd)$

Начнем с интеграла в уравнении (2.3.8):

$$I(\nu) = \int_0^{\infty} d\omega g^2(\omega) \cos(k(x_n - x_{n'})) \zeta(\nu - \omega). \quad (A1.1)$$

Используя выражение (2.3.7), получаем:

$$I(\nu) = -i\pi g^2(\nu) \cos k_\nu d_{nn'} + I_-(\nu) = -i\pi g^2(\nu) e^{ik_\nu d_{nn'}} + (I_-(\nu) - \pi g^2(\nu) \sin k_\nu d_{nn'}), \quad (A1.2)$$

где:

$$I_-(\nu) = -P \int_0^{\infty} d\omega \frac{g^2(\omega) \cos(kd_{nn'})}{\omega - \nu}. \quad (A1.3)$$

Обычно этот интеграл вычисляется путем вынесения $g^2(\omega)$ из-под интеграла на частоте ν и опускания нижней границы до $-\infty$:

$$I_-(\nu) \approx -g^2(\nu) P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\cos(\omega t_{nn'})}{\omega - \nu} = \pi g^2(\nu) \sin(\nu t_{nn'}), \quad (A1.4)$$

где $t_{nn'} = d_{nn'} / v_g$, и мы воспользовались соотношением Крамерса-Кронига. В этом случае второй член в скобках в (A1.2) равен нулю. Следовательно, для $I(\nu)$ получаем: $I(\nu) = -i\pi g^2(\nu) e^{(i\nu t_{nn'})}$.

Мы получили бы (A1.4), если бы добавили к $I_-(\nu)$ (A1.3) член, соответствующий быстро осциллирующим амплитудам за пределами RWA, $I_+(\nu)$:

$$I_+(\nu) = -P \int_0^{\infty} d\omega \frac{g^2(\omega) \cos(kd_{nn'})}{\omega + \nu}. \quad (A1.5)$$

Если мы предположим, что $g^2(\omega) = \lambda \omega$, заменим переменные в подынтегральном выражении в (A1.5) ($\omega \rightarrow -\omega$) и сложим результат с $I_-(\nu)$, то получим результат, приведенный в (A1.4). Строго говоря, эта процедура не вполне оправдана, поскольку любая частотно-зависимая связь (в нашем случае $g^2(\omega)$) должна быть в точности равна нулю для отрицательных частот.

Чтобы оценить вклад члена за пределами RWA, необходим более сложный расчет $I_-(\nu)$ (A1.3). Сначала мы добавляем и вычитаем из $I_-(\nu)$ член обратного вращения $I_+(\nu)$: $I_-(\nu) = [I_-(\nu) + I_+(\nu)] - I_+(\nu) = \pi g^2(\nu) \sin(\nu t_{nn'}) - I_+(\nu)$. Следовательно, для второго члена в правой части (A1.2) получаем:

$$I_+(\nu) = -\left(I_-(\nu) - \pi g^2(\nu) \sin k_\nu d_{nn'}\right). \quad (\text{A1.6})$$

Далее приступаем к расчету величины $I_+(\nu)$. Мы предполагаем $g^2(\omega) = \lambda \omega$. Тогда получаем:

$$I_+(\nu) = -\lambda P \int_0^\infty d\omega \frac{\omega \cos(\omega t_{nn'})}{\omega + \nu} = -\lambda \int_0^\infty d\omega \cos(\omega t_{nn'}) + \lambda \nu P \int_0^\infty d\omega \frac{\cos(\omega t_{nn'})}{\omega + \nu}. \quad (\text{A1.7})$$

Чтобы вычислить первый член правой части, мы добавляем небольшой сходящийся коэффициент. Это отражает тот факт, что система не должна взаимодействовать с высокими частотами. Таким образом, находим, что этот член сокращается:

$$\int_0^\infty d\omega \cos(\omega t_{nn'}) = \nu \int_0^\infty dy \cos(y \nu t_{nn'}) = \nu \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^\infty dy e^{-\eta y} \cos y \nu t_{nn'} = \nu \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\eta}{(\nu t_{nn'})^2 + \eta^2} = 0. \quad (\text{A1.8})$$

В подинтегральном выражении для второго члена сделаем замену переменной $x = (\omega + \nu) / \nu$:

$$\begin{aligned} P \int_0^\infty d\omega \frac{\cos(\omega t_{nn'})}{\omega + \nu} &= P \int_1^\infty dx \frac{\cos((x-1)\nu t_{nn'})}{x} = \\ &= \cos \nu t_{nn'} P \int_1^\infty dx \frac{\cos(x \nu t_{nn'})}{x} + \sin \nu t_{nn'} P \int_1^\infty dx \frac{\sin(x \nu t_{nn'})}{x}. \end{aligned} \quad (\text{A1.9})$$

Два интеграла из (A1.9) можно выразить через интегральные функции синуса и косинуса, которые заданы в (2.3.11). Следовательно, для величины $I_+(\nu)$ получаем:

$$I_+(\nu) = -g^2(\nu) \cos \nu t_{nn'} Ci(\nu |t_{nn'}|) + g^2(\nu) \sin \nu t_{nn'} \left(\frac{\pi}{2} \text{sgn}(t_{nn'}) - Si(\nu t_{nn'}) \right). \quad (\text{A1.10})$$

Как видно из (A1.10), величина $I_+(\nu)$ является четной функцией $t_{nn'}$. Поэтому мы можем переписать (A1.10) в следующем виде:

$$I_+(\nu) = -g^2(\nu) \cos \nu t_{nn'} Ci(\nu |t_{nn'}|) + g^2(\nu) \sin \nu |t_{nn'}| \left(\frac{\pi}{2} - Si(\nu |t_{nn'}|) \right). \quad (\text{A1.11})$$

Наконец, для полного значения $I(\nu)$ получаем:

$$I(\nu) = -i \frac{\Gamma(\nu)}{4} e^{i\nu |t_{nn'}|} + \frac{\Gamma(\nu)}{4\pi} \cos \nu t_{nn'} Ci(\nu |t_{nn'}|) + \frac{\Gamma(\nu)}{4\pi} \sin \nu |t_{nn'}| \left(-\frac{\pi}{2} + Si(\nu |t_{nn'}|) \right). \quad (\text{A1.12})$$

Подстановка $I(\nu)$ в (2.3.8) дает уравнение (2.3.9) с величиной $G(kd_{nn'})$, определенной в (2.3.10).

Кроме того, согласно выводу, величина $G(kd_{nn'})$ может быть выражена как:

$$G(k_\nu d_{nn'}) = -\frac{4}{\Gamma(\nu)} I_+(\nu) = -\frac{4}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty d\omega \frac{g^2(\omega) \cos k_\nu d_{nn'}}{\omega + \nu}. \quad (\text{A1.13})$$

Говоря по простому, $G(kd_{nn'})$ это разница между $\pi g^2(\nu) \sin(\nu t_{nn'})$, что учитывает вклад членов вне RWA ($\pi g^2(\nu) \sin(\nu t_{nn'}) = I_-(\nu) + I_+(\nu)$), и $I_-(\nu)$:

$$G(k_\nu d_{nn'}) = -\frac{4}{\Gamma(\nu)} \left(\pi g^2(\nu) \sin(\nu t_{nn'}) - I_-(\nu) \right). \quad (\text{A1.14})$$

Численные расчеты $G(kd)$, представленные на рисунках 2.5 и 2.6 в основном тексте показывают, что в пределах ширины резонанса вклад, не связанный с RWA, довольно мал для $kd_{nn'} > \pi/4$. Однако это не так, если $kd_{nn'} < \pi/4$.

A2. Доказательство выражения (2.4.4)

В рамках приближения Вигнера-Вайскопфа $\Gamma(\Omega) \ll \Omega$. Следовательно, в (2.4.3) мы можем опустить $F(\omega)$ и заменить $\Gamma(\omega)$ на $\Gamma(\Omega) \equiv \Gamma$. Далее, воспользуемся одним из выражений дзета-функции (2.3.9):

$$\zeta(\omega - \omega') = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\omega - \omega' + i\sigma}. \quad (\text{A2.1})$$

Таким образом, для (2.4.3) получаем:

$$\beta(t) = i \int_0^\infty d\omega' g(\omega') \gamma_0(\omega') \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i(\omega - \Omega)t}}{\left(\omega - \Omega + i\frac{\Gamma}{2}\right)(\omega - \omega' + i\sigma)}. \quad (\text{A2.2})$$

В нижней части комплексной плоскости ω имеется только два полюса. Применяя теорему Коши о вычетах ко второму интегралу в (A2.2), получаем следующий результат:

$$\beta(t) = \int_0^\infty d\omega' g(\omega') \gamma_0(\omega') \frac{e^{\frac{\Gamma}{2}t} - e^{-i(\omega' - \Omega)t}}{\left(\omega' - \Omega + i\frac{\Gamma}{2}\right)}. \quad (\text{A2.3})$$

Здесь время следует считать положительным, $t > 0$, поскольку $\beta(t) = 0$ для $t < 0$. Это также следует из того факта, что для отрицательных времен придется поменять направление обхода контура, что в таком случае даст ноль.

Приложение Б. Вывод точных выражений для амплитуд при рассеянии поля на возбужденном кубите

Первое слагаемое в исходном выражении (3.4.16а) уже содержит начальное значение β_0 . Нам необходимо выразить оставшиеся слагаемые через это же начальное поле. Произведем следующую сдвигку:

$$x \rightarrow v_g t' - x, \quad t \rightarrow t - \frac{x}{v_g}. \quad (\text{Б1})$$

В этом случае получим первое сдвинутое значение для правой амплитуды:

$$\beta_R \left(-x + v_g t', t - \frac{x}{v_g} \right) = A_R^{(0)} - \theta(v_g t' - x) \theta(t - t') A_R^{(1)}, \quad (\text{Б2а})$$

$$A_R^{(0)} = e^{-\Gamma(t-x/v_g)} \beta_0(v_g(t'-t)),$$

$$A_R^{(1)} = \Gamma \int_0^{t'-x/v_g} dt'' e^{-\Gamma t''} e^{-i\Omega \left(t'' - t' + \frac{x}{v_g} \right)} \left[\beta_R(x - v_g(t' - t''), t - t') + \beta_L(v_g(t' - t'') - x, t - t') \right], \quad (\text{Б2б})$$

Здесь специально введена упрощенная форма записи, потому что выражения быстро становятся громоздкими, и трудно разглядеть необходимые члены. Для левой волны в (3.4.16а) вводим вторую сдвигку:

$$x \rightarrow x - v_g t', \quad t \rightarrow t - \frac{x}{v_g}. \quad (\text{Б3})$$

Тогда аналогично получаем:

$$\beta_L \left(x - v_g t', t - \frac{x}{v_g} \right) = -\theta(v_g t' - x) \theta(t - t') A_L^{(1)}, \quad (\text{Б4а})$$

$$A_L^{(1)} = \Gamma \int_0^{t'-x/v_g} dt'' e^{-\Gamma t''} e^{-i\Omega \left(t'' - t' + \frac{x}{v_g} \right)} \left[\beta_L(v_g(t' - t'') - x, t - t') + \beta_R(x - v_g(t' - t''), t - t') \right], \quad (\text{Б4б})$$

Если теперь подставить (Б2а) и (Б4а) в (3.4.16а), получим:

$$\begin{aligned}
\beta_R(x, t) = & e^{-\Gamma t} \beta_0(x - v_g t) \\
& - \Gamma \theta(x) \theta\left(t - \frac{x}{v_g}\right) \int_0^{x/v_g} dt' e^{-\Gamma t'} e^{-i\Omega\left(t' - \frac{x}{v_g}\right)} \left(A_R^{(0)} - \theta(v_g t' - x) \theta(t - t') A_R^{(1)} \right) \\
& + \Gamma \theta(x) \theta\left(t - \frac{x}{v_g}\right) \int_0^{x/v_g} dt' e^{-\Gamma t'} e^{-i\Omega\left(t' - \frac{x}{v_g}\right)} \theta(v_g t' - x) \theta(t - t') A_L^{(1)}
\end{aligned} \tag{B5}$$

Члены, содержащие $\int_0^{x/v_g} \theta(v_g t' - x) dt'$ из-за несовпадения интервалов будут равны нулю, поскольку условие тета-функции есть $t' > x/v_g$. Таким образом, в выражении для правой кубитной амплитуды остаются только члены, содержащие $A^{(0)}$, пропорциональные только начальному значению поля. Раскрывая их, получим финальное выражение:

$$\begin{aligned}
\beta_R(x, t) = & e^{-\Gamma t} \beta_0(x - v_g t) + \\
& - \Gamma \theta(x) \theta\left(t - \frac{x}{v_g}\right) \int_0^{x/v_g} dt' e^{-\Gamma t'} e^{-i\Omega\left(t' - \frac{x}{v_g}\right)} e^{-\Gamma(t - x/v_g)} \beta_0(v_g(t' - t)),
\end{aligned} \tag{B6}$$

Аналогично проводится и вывод для левой кубит-фотонной амплитуды (3.4.16b).